Θεωρία Γραφημάτων	
Διάλεξη 11: 23.11.2016	Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος
Γραφείς: Παναγιώτης Ρεπούσκος & Σ. Κ.	

11.1 Βασικές ιδιότητες επιπέδων γραφημάτων

Θεώρημα 11.1 (Τύπος του Euler, 1752) *Αν ένα συνεκτικό ενεπίπεδο γράφημα έχει n κορυφές, m ακμές και f όψεις, τότε ισχύει πως $n - m + f = 2$.*

Θεώρημα 11.2 *Έστω ένα γράφημα G. Αν $|G| \geq 3$ και το G είναι επίπεδο, τότε $|E(G)| \leq 3|G| - 6$. Αν το G δεν περιέχει τρίγωνο, τότε $|E(G)| \leq 2|G| - 4$.*

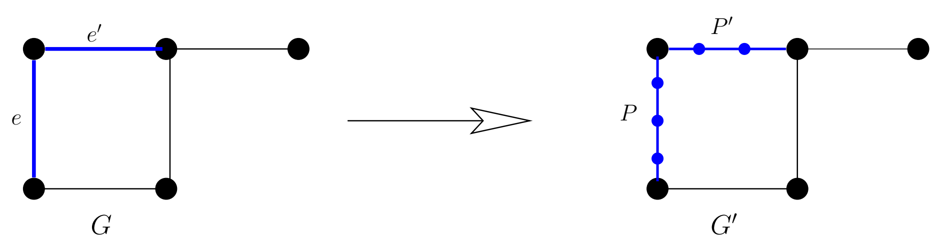
Πόρισμα 11.1 *Τα γραφήματα K_5 και $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδα.*

Απόδειξη. Το K_5 έχει $\binom{5}{2} = 10$ ακμές. Από Θεώρημα 11.2, αφού $10 > 3 \cdot 5 - 6 = 9$, το K_5 δεν είναι επίπεδο. Όμοια, το $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο, αφού $|E(K_{3,3})| = 9 > 2 \cdot 6 - 4 = 8$.

∎

11.2 Ελάσσονα, σύνολα παρεμπόδισης

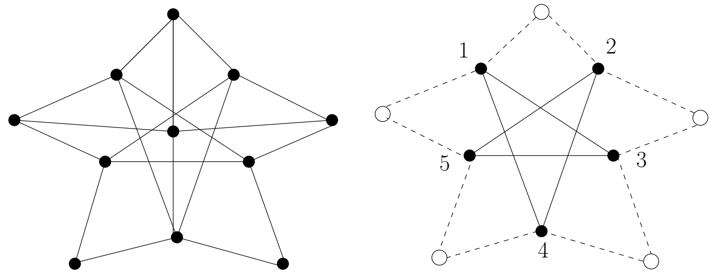
Ορισμός 11.1 Υποδιαίρεση *ενός γραφήματος $G = (V, E)$ είναι ένα γράφημα, που προκύπτει από το G αντικαθιστώντας ακμές με εσωτερικά διακεκριμένα μονοπάτια.*



Σχήμα 11.1: Αντικαθιστώντας τις ακμές e, e' με τα εσωτερικά διακεκριμένα μονοπάτια P, P', πήραμε την υποδιαίρεση G' του G.

Λέμε ότι ένα γράφημα G *περιέχει ως υπογράφημα μια υποδιαίρεση του γραφήματος H* αν το G περιέχει ως υπογράφημα μια υποδιαίρεση ενός γραφήματος ισόμορφου με το H.

Θεώρημα 11.3 (Kuratowski, 1930) *Ένα γράφημα είναι επίπεδο ανν δεν περιέχει ως υπογράφημα μία υποδιαίρεση του K_5 ή του $K_{3,3}$.*



Σχήμα 11.2: Το γράφημα του Grötzsch (αριστερά). Δεν είναι επίπεδο και έχει ως υπογράφημα μία υποδιαίρεση του K_5 (δεξιά). Επίσης, $n = 11$, $m = 20$ και $m \leq 11 \cdot 3 - 6 = 27$. Η συνθήκη του Θεωρήματος 11.2 δεν είναι ικανή.

Με τον όρο *σύνθλιψη* της ακμής uv στο γράφημα G εννοούμε την αντικατάσταση των κορυφών u και v από μία καινούργια κορυφή w η οποία είναι γειτονική με όλους τους γείτονες των u και v. Συμβολίζουμε το γράφημα που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο ως $G \backslash uv$. Για τη διαγραφή μιας ακμής $e = uv$ θα χρησιμοποιούμε πάντα τον συμβολισμό $G \backslash e$ ώστε να μη δημιουργείται σύγχυση.

Ορισμός 11.2 Έλασσον (minor) *ενός γραφήματος $G = (V, E)$ είναι ένα γράφημα, που μπορεί να προκύψει από το G με μηδέν ή περισσότερες από τις ακόλουθες τρεις πράξεις:*

(α) διαγραφές κορυφών

(β) διαγραφές ακμών

(γ) συνθλίψεις ακμών.

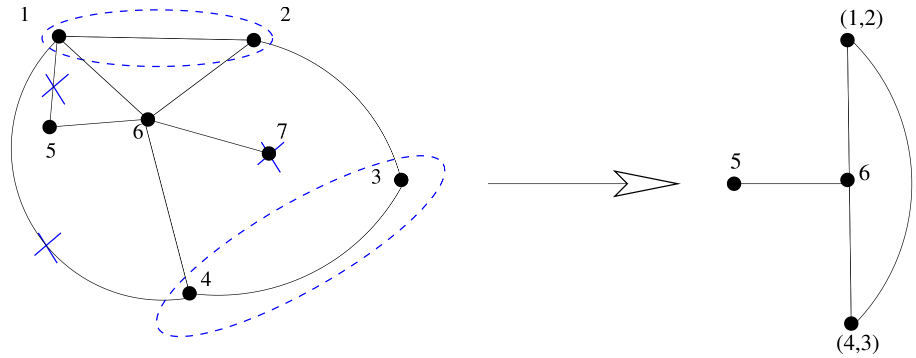
Λέμε ότι το G *περιέχει ως έλασσον* ένα γράφημα H αν ένα γράφημα ισόμορφο του H είναι έλασσον του G. Γράφουμε $H \leq_m G$. Ένα *μοντέλο του γραφήματος H στο G* είναι μια συνάρτηση $\phi : V(H) \to 2^{V(G)}$ τέτοια ώστε: (i) για διακεκριμένα $x, y \in V(H)$, $G[\phi(x)]$ και $G[\phi(y)]$ είναι κορυφοδιακεκριμένα συνεκτικά υπογραφήματα του G και (ii) για κάθε δύο γειτονικές κορυφές x, y του H, υπάρχει τουλάχιστον μία ακμή στο G από το $\phi(x)$ στο $\phi(y)$. Δεδομένου του μοντέλου ϕ, για κάθε $x \in V(H)$, $\phi(x)$ είναι το *μοντέλο της κορυφής x στο G*. Βλ. Σχήμα 11.3.

Άσκηση 11.1 *Υπάρχει μοντέλο του γραφήματος H στο G αν και μόνο αν $H \leq_m G$.*

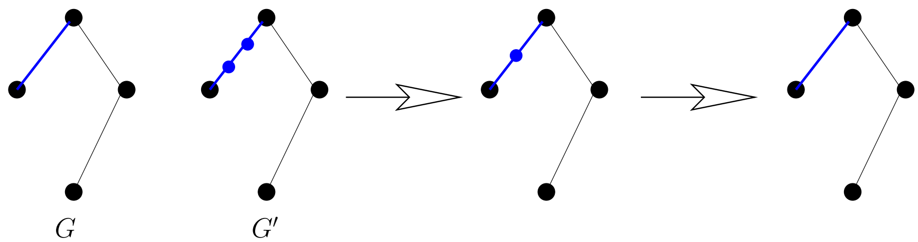
Παρατήρηση 11.1 *Αν το G' είναι υποδιαίρεση του G, τότε το G είναι έλασσον του G' (βλ. Σχήμα 11.4). Αν μια υποδιαίρεση του H είναι υπογράφημα του G τότε $H \leq_m G$.*

Τα αντίστροφα των προτάσεων της Παρατήρησης 11.1 γενικά δεν ισχύουν. Βλ. Σχήμα 11.5.

Με τον όρο *διάλυση* μιας κορυφής v βαθμού 2 στο γράφημα G εννοούμε τη διαγραφή της κορυφής v και την προσθήκη (εάν δεν υπάρχει ήδη) της ακμής xy όπου x, y οι δύο γείτονες της v. Συμβολίζουμε το γράφημα που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο ως G/v.



Σχήμα 11.3: Διαγράφοντας την κορυφή 7, τις ακμές $\{1,5\}$, $\{1,4\}$ και συνθλίβοντας τις $\{1,2\}$, $\{4,3\}$, προκύπτει ένα έλασσον του αρχικού γραφήματος.



Σχήμα 11.4: Το G' είναι υποδιαίρεση του G και το G προκύπτει από το G' με δύο συνθλίψεις ακμών.

Ορισμός 11.3 Τοπολογικό έλασσον (topological minor) *ενός γραφήματος* $G = (V, E)$ *είναι ένα γράφημα, που μπορεί να προκύψει από το* G *με μηδέν ή περισσότερες από τις ακόλουθες τρεις πράξεις:*

(α) διαγραφές κορυφών

(β) διαγραφές ακμών

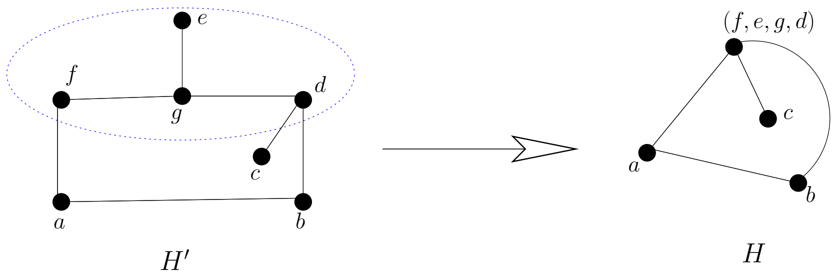
(γ) διαλύσεις κορυφών βαθμού 2.

Λέμε ότι το G *περιέχει ως τοπολογικό έλασσον* ένα γράφημα H αν ένα γράφημα ισόμορφο του H είναι τοπολογικό έλασσον του G. Γράφουμε $H \leq_{tm} G$. Η *υποδιαίρεση μια ακμής* e, δηλ. η αντικατάσταση της e από ένα μονοπάτι μήκους 2, είναι η αντίστροφη πράξη της διάλυσης κορυφής. Με αυτή την ορολογία μία υποδιαίρεση του G είναι ένα γράφημα που προκύπτει από διαδοχικές υποδιαιρέσεις ακμών. Το Θεώρημα του Kuratowski (Θεώρημα 11.3) διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής: ένα γράφημα είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν περιέχει το K_5 ή το $K_{3,3}$ ως τοπολογικά ελάσσονα.

Ο περιορισμός $\Delta(H) \leq 3$ στην επόμενη πρόταση οφείλεται στην παρατήρηση ότι με διαλύσεις κορυφών του G δεν μπορείς να αυξήσεις τον βαθμό μίας κορυφής ώστε να υπερβεί το 3.

Λήμμα 11.1 *(i) Αν* $H \leq_{tm} G$ *τότε και* $H \leq_m G$. *(ii) Αν* $\Delta(H) \leq 3$ *και* $H \leq_m G$ *τότε* $H \leq_{tm} G$.

Απόδειξη. Η απόδειξη του (i) είναι προφανής. Για την απόδειξη του (ii) υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το H προκύπτει από το G μόνο με συνθλίψεις ακμών (διαγραφές κορυφών και



Σχήμα 11.5: Το H είναι έλασσον του H', όμως το H' δεν είναι υποδιαίρεση του H. Το H είναι και τοπολογικό έλασσον του H'.

ακμών είναι αποδεκτές και για τα ελάσσονα και για τα τοπολογικά ελάσσονα). Άρα δεν υπάρχει γνήσιο υπογράφημα του G που περιέχει το H ως έλασσον.

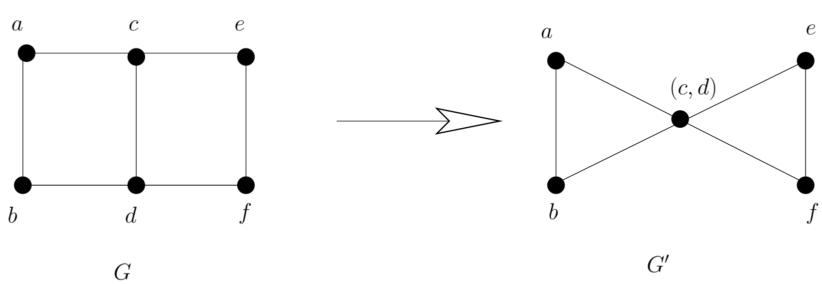
Έστω ϕ ένα μοντέλο του H στο G. Έστω $v \in V(H)$ η οποία είναι γειτονική στο H με $u \in V(H)$. Το $T_v := G[\phi(v)]$ είναι δέντρο που περιέχει το πολύ τρία φύλλα. Ονομάζουμε l_u^v το φύλλο του T_v που προσπίπτει στη μοναδική ακμή του $E(G)$ η οποία ενώνει μία κορυφή του $\phi(v)$ με κορυφή του $\phi(u)$. Επειδή το T_v έχει το πολύ τρία φύλλα αποτελείται από $d_H(v)$ εσωτερικά διακεκριμένα μονοπάτια με κοινή αφετηρία μία κορυφή $x_v \in \phi(v)$ και κατάληξη l_u^v για κάθε γείτονα u του v στο H. Αν για κάθε v πάρουμε αυτά τα μονοπάτια και τα ενώσουμε χρησιμοποιώντας τις ακμές $l_u^v l_v^u$, $u \in N_H(v)$, παίρνουμε υπογράφημα του G που είναι υποδιαίρεση του H. Οι κορυφές $\{x_v \mid v \in V(H)\}$ αντιστοιχούν στις κορυφές του H. ∎

Μόνο η μία κατεύθυνση του παρακάτω θεωρήματος προκύπτει άμεσα ως πόρισμα του Θεωρήματος 11.3. Η άλλη θέλει ξεχωριστή απόδειξη.

Θεώρημα 11.4 (Wagner, 1937) *Ένα γράφημα είναι επίπεδο ανν δεν περιέχει το K_5 ή το $K_{3,3}$ ως ελάσσονα.*

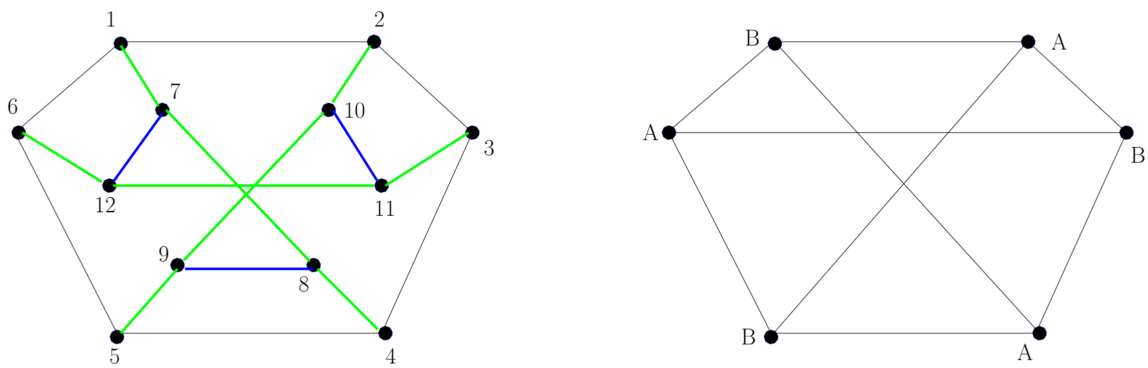
Πρόταση 11.1 *Η κλάση των επιπέδων γραφημάτων είναι* κλειστή ως προς ελάσσονα (minor-closed). *Δηλαδή, κάθε έλασσον ενός επίπεδου γραφήματος είναι επίπεδο.*

Παράδειγμα 11.1 *Η κλάση των δισυνεκτικών γραφημάτων δεν είναι κλειστή ως προς ελάσσονα.*



Σχήμα 11.6: Το G' είναι έλασσον του δισυνεκτικού G, όμως έχει αρθρικό σημείο.

Θεώρημα 11.5 (Robertson - Seymour, 2004) *Κάθε κλάση γραφημάτων που είναι κλειστή ως προς ελάσσονα, μπορεί να περιγραφεί από ένα πεπερασμένο σύνολο απαγορευμένων ελασσόνων («σύνολο παρεμπόδισης»).*



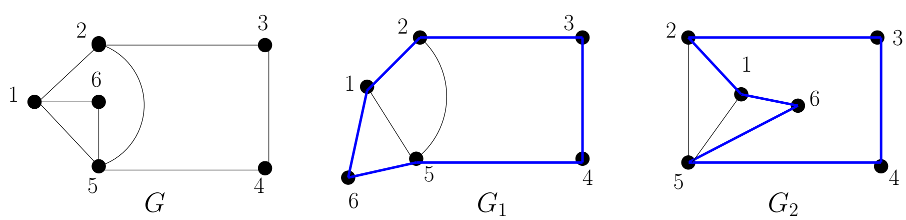
Σχήμα 11.7: Το γράφημα του Franklin (αριστερά). Είναι 3-κανονικό και hamiltonian. Σβήνοντας τις μπλε ακμές και συνθλίβοντας κατάλληλα τα πράσινα μονοπάτια, βλέπουμε πως το γράφημα περιέχει το $K_{3,3}$ ως έλασσον (δεξιά, όπου A, B οι δύο διαμερίσεις), οπότε δεν είναι επίπεδο. Επίσης παρατηρούμε πως $n = 12$, $m = 18$ και $m \leq 3 \cdot 12 - 6 = 30$.

Παράδειγμα 11.2 *Η κλάση των δασών, που είναι κλειστή ως προς ελάσσονα, έχει ως σύνολο παρεμπόδισης το K_3.*

το G δεν είναι δάσος	$\Leftrightarrow$
το G περιέχει κύκλο	$\Leftrightarrow$
το G περιέχει ως έλασσον το K_3	

11.3 Εξωεπίπεδα γραφήματα

Ορισμός 11.4 *Ένα επίπεδο γράφημα G καλείται* εξωεπίπεδο *(outerplanar) αν μπορεί να εμβαπτιστεί στο επίπεδο, έτσι ώστε όλες οι κορυφές του να βρίσκονται στο σύνορο της ίδιας όψης.*



Σχήμα 11.8: Το εξωεπίπεδο γράφημα G και δύο εμβαπτίσεις του G_1, G_2, που έχουν όλες τις κορυφές στο (μπλε) σύνορο της ίδιας όψης.

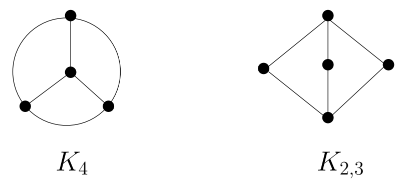
Πρόταση 11.2 *Το σύνορο της όψης πάνω στην οποία βρίσκονται όλες οι κορυφές ενός 2-συνεκτικού εξωενεπίπεδου γραφήματος, είναι επικαλύπτων κύκλος (spanning cycle).*

Απόδειξη. Το σύνορο περιέχει όλες τις κορυφές. Αν δεν είναι κύκλος, τότε ο περίπατος που το διατρέχει, περνάει από κάποια κορυφή v πάνω από μία φορά. Η v δηλαδή είναι αρθρικό σημείο. Άτοπο, επειδή το γράφημα είναι 2-συνεκτικό.

∎

Πρόταση 11.3 *Το K_4 και το $K_{2,3}$ είναι επίπεδα, αλλά όχι εξωεπίπεδα.*

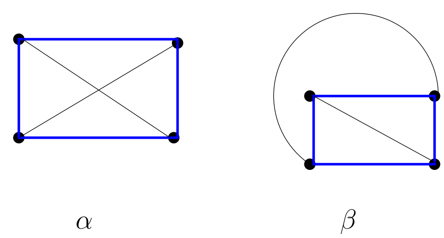
Απόδειξη.



Σχήμα 11.9: Εμβαπτίσεις του K_4 και του $K_{2,3}$ στο επίπεδο.

Παρατηρούμε ότι και τα δύο είναι 2-συνεκτικά.

Μία εξωεπίπεδη εμβάπτιση προϋποθέτει επικαλύπτοντα κύκλο. Αυτό θα σήμαινε πως στο $K_{2,3}$ περιέχεται ο C_5, το οποίο είναι αδύνατο, αφού το $K_{2,3}$ είναι διμερές.



Στο K_4 υπάρχει επικαλύπτων κύκλος. Όμως τα άκρα των άλλων δύο ακμών εναλλάσσονται στον κύκλο. Δεν μπορούν να είναι και οι 2 ακμές μέσα (σχήμα α). Αν σχεδιάσουμε τη μία μέσα και την άλλη έξω, απομονώνουμε μία κορυφή από την όψη που θα θέλαμε να ορίζει την εξωεπιπεδότητα (σχήμα β).

∎