Θεωρία Γραφημάτων

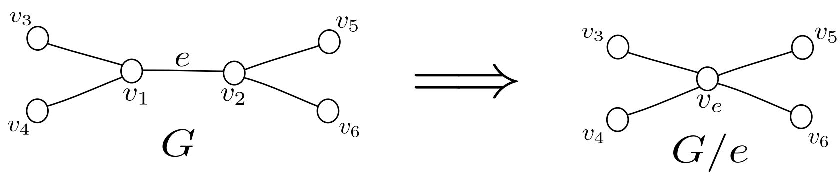
Διάλεξη 5: 26.10.2016 | Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Γεώργιος Πιτσιλαδής & Σ. Κ.

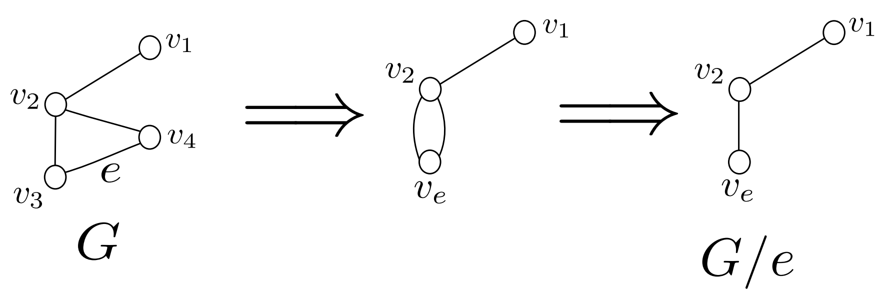
5.1 Εναλλακτική απόδειξη του Θεωρήματος Menger

Ορισμός 5.1 Σύνθλιψη ακμής $e = \{v_i, v_j\}$ *στο* $G = (V, E)$ *είναι η πράξη που παράγει το γράφημα* G/e *εισάγοντας κορυφή* v_e *που δεν ανήκει στο* V *και νέες ακμές ώστε η* v_e *να γειτονεύει με κάθε κορυφή του* $N(e)$ *και σβήνοντας τις* v_i, v_j *και τυχόν παράλληλες ακμές που προκύπτουν. Το σύνολο* $N(e) = \{v \in V \mid \{v, v_i\} \in E$ *ή* $\{v, v_j\} \in E\}$ *καλείται* γειτονιά *της ακμής* $e = \{v_i, v_j\}$.

Προσοχή! Το G/e να μη συγχέεται με το $G \setminus e$. Με το δεύτερο συμβολισμό παρίσταται συνήθως το $G - e$.



Σχήμα 5.1: Σύνθλιψη της ακμής $e = \{v_1, v_2\}$.



Σχήμα 5.2: Σύνθλιψη της ακμής $e = \{v_3, v_4\}$. Παρατηρούμε το σβήσιμο των παράλληλων ακμών.

Υπενθυμίζουμε τη διατύπωση του Θεωρήματος του Menger (Θεώρημα 4.2) και παραθέτουμε μια εναλλακτική απόδειξη.

Θεώρημα 5.1 (Menger, 1927) *Δίνεται γράφημα* $G = (V, E)$ *και έστω* $S, T \subseteq V$. *Ο μέγιστος αριθμός διακεκριμένων* S-T *μονοπατιών είναι ίσος με το ελάχιστο μέγεθος ενός* S-T *διαχωριστή.*

Απόδειξη: Με επαγωγή στο $|E|$.

Βάση. Έστω $|E| = 0$. Τότε προφανώς το $S \cap T$ είναι (ο ελάχιστος) S-T διαχωριστής και υπάρχουν ακριβώς $|S \cap T|$ (τετριμμένα) διακεκριμένα S-T μονοπάτια.

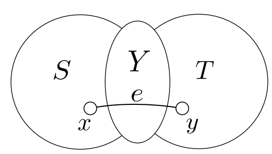
Επαγωγικό Βήμα. Έστω $e = \{x, y\} \in \mathrm{E}$ και k το ελάχιστο μέγεθος S-T διαχωριστή στο G. Για να αποφύγουμε τις ασάφειες, ορίζουμε στο G/e πως $v_e \in S$ (αντ. $v_e \in T$) αν τουλάχιστον ένα από τα x, y ανήκει στο S (αντ. στο T).

Παρατήρηση 5.1 *Αν το G δεν περιέχει k διακεκριμένα S-T μονοπάτια, ούτε το G/e περιέχει. Επίσης, κάθε μονοπάτι του G/e έχει ένα αντίστοιχο (ίσως τετριμμένο) μονοπάτι στο G.*

Αν κάθε S-T διαχωριστής στο G/e έχει μέγεθος τουλάχιστον k, εφαρμόζουμε την Επαγωγική Υπόθεση και βρίσκουμε k διακεκριμένα μονοπάτια στο G/e. Είτε κάποιο από αυτά περιέχει την κορυφή v_e είτε όχι, παίρνουμε άμεσα k διακεκριμένα μονοπάτια στο G.

Απομένει η περίπτωση που υπάρχει S-T διαχωριστής Y στο G/e με $|Y| < k$. Υποχρεωτικά $v_e \in Y$, ειδάλλως $Y \subseteq V$ θα ήταν S-T διαχωριστής στο G. Με βάση τα παραπάνω, το $X = (Y \setminus \{v_e\}) \cup \{x, y\}$ είναι S-T διαχωριστής στο G, διότι το $Y \setminus \{v_e\}$ τέμνει όλα τα S-T μονοπάτια στο G εκτός ίσως από εκείνα που διέρχονται από το x ή το y.

Εξ ορισμού, $|X| \leq |Y| + 1 \leq k$ και επειδή το X είναι S-T διαχωριστής στο G, $|X| = k$. Κάθε S-T μονοπάτι Q του G περνάει από το X και άρα περιέχει ένα S-X υπομονοπάτι Q' το οποίο είτε είναι τετριμμένο είτε καμία εσωτερική κορυφή του δεν ανήκει στο X. Επομένως η ακμή e δεν ανήκει στο Q'. Συμπεραίνουμε ότι κάθε S-X διαχωριστής στο $G - e$ είναι επίσης S-T διαχωριστής στο G και άρα περιέχει τουλάχιστον k κορυφές. Ομοίως, κάθε X-T διαχωριστής στο $G - e$ είναι επίσης S-T διαχωριστής στο G.



Εφαρμόζοντας την Επαγωγική Υπόθεση στο $G - e$, υπάρχουν k διακεκριμένα S-X μονοπάτια και k διακεκριμένα X-T μονοπάτια στο $G - e$. Καθώς το X διαχωρίζει τα S, T στο G, τα $2k$ μονοπάτια δεν τέμνονται εκτός του X και, επειδή είναι διακεκριμένα, μπορούμε να τα ενώσουμε ανά δύο και να φτιάξουμε k διακεκριμένα S-T μονοπάτια. ∎

5.2 Συνέπειες του Θεωρήματος του Menger

Πόρισμα 5.1 *Δίνεται γράφημα G και έστω $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ και $v \in \mathrm{V}(G) \setminus S$. Ο ελάχιστος αριθμός κορυφών διαφορετικών του v που διαχωρίζουν το $\{v\}$ από το S στο G είναι ίσος με το μέγιστο αριθμό μονοπατιών που φτιάχνουν μια $\{v\}$-S βεντάλια (fan). Μία $\{v\}$-S* βεντάλια *είναι ένα σύνολο $\{v\}$-S μονοπατιών που τέμνονται μόνο στο v.*

Απόδειξη: Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα του Menger με $T = N(v)$.

Παρατήρηση 5.2 *Κάθε S-$N(v)$ διαχωριστής είναι και S-$\{v\}$ διαχωριστής.*

Παρατήρηση 5.3 *Ένας S-$\{v\}$ διαχωριστής που δεν περιέχει το v είναι και S-$N(v)$ διαχωριστής.*

Οι δύο παρατηρήσεις παρουσιάζουν μια φαινομενική ασυμμετρία όσον αφορά την πιθανή συμπερίληψη του v σε έναν S-$\{v\}$ διαχωριστή. Εξειδικεύουμε περαιτέρω την Παρατήρηση 5.2. Έστω S-$N(v)$ διαχωριστής X τ. ώ. $v \in X$. Γνωρίζουμε ότι ο διαχωριστής τέμνει όλα τα S-$\{v\}$ μονοπάτια. Οποιοδήποτε τέτοιο μονοπάτι P περιέχει γνήσιο πρόθεμα Q (μπορεί και μηδενικού μήκους) που καταλήγει σε κορυφή x του $N(v)$ (η οποία μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο S). Το σύνολο $X \setminus \{v\}$ τέμνει το Q άρα και το P. Άρα παίρνουμε το ακόλουθο.

Παρατήρηση 5.4 *Για κάθε S-$N(v)$ διαχωριστή μεγέθους k, υπάρχει S-$\{v\}$ διαχωριστής που δεν περιέχει το v και έχει μέγεθος το πολύ k.*

Από την Παρατήρηση 5.3 συνάγεται ότι το μέγεθος ενός ελάχιστου S-$\{v\}$ διαχωριστή που δεν περιέχει το v είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το μέγεθος ενός ελάχιστου S-$N(v)$ διαχωριστή. Από την Παρατήρηση 5.4 συνάγεται ότι το μέγεθος ενός ελάχιστου S-$N(v)$ διαχωριστή είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το μέγεθος ενός ελάχιστου S-$\{v\}$ διαχωριστή που δεν περιέχει το v. Άρα οι δύο ποσότητες είναι ίσες. Από το Θεώρημα του Menger (Θεώρημα 5.1), ο ελάχιστος αριθμός κορυφών διαφορετικών του v που διαχωρίζουν το $\{v\}$ από το S στο G είναι ίσος με τον μέγιστο αριθμό διακεκριμένων μονοπατιών από το S στο $N(v)$. Έστω $\mathcal{P}$ το σύνολο αυτών των μονοπατιών. Θα το μετασχηματίσουμε σε ένα σύνολο $\mathcal{P}'$ που αποτελείται από $\{v\}$-S μονοπάτια που τέμνονται μόνο στο v.

Αν $P \in \mathcal{P}$ διέρχεται από το v, το P περιέχει ένα μεγιστικό πρόθεμα Q (μπορεί και μηδενικού μήκους) από το S προς κάποιο $u \in N(v)$ τ. ώ. το Q δεν διέρχεται από το v. Στο $\mathcal{P}'$ περιλαμβάνουμε το μονοπάτι που προκύπτει από την ένωση του Q με την ακμή $\{u, v\}$.

Για τα S-$N(v)$ μονοπάτια στο $\mathcal{P}$ που δεν διέρχονται από το v, και τερματίζουν σε κάποια κορυφή $x \in N(v)$, βάζουμε ένα αντίστοιχο μονοπάτι στο $\mathcal{P}'$ προσαρτώντας την ακμή $\{x, v\}$ σε καθένα από αυτά. Παρατηρήστε ότι επειδή όλα τα μονοπάτια του $\mathcal{P}$ είναι διακεκριμένα, η ακμή αυτή δεν χρησιμοποιείται σε άλλο μονοπάτι του $\mathcal{P}'$. Κατασκευάσαμε την επιθυμητή βεντάλια $\mathcal{P}'$ έτσι ώστε $|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|$. ∎

Παρατηρήστε ότι στο Πόρισμα 5.1 δεν ενδιαφέρει η συνεκτικότητα $\kappa(G)$. Μπορούμε να την ενσωματώσουμε στην παρακάτω διατύπωση.

Πόρισμα 5.2 *Δίνεται γράφημα G και έστω $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ και $v \in \mathrm{V}(G) \setminus S$. Αν το G είναι k-συνεκτικό γράφημα, υπάρχει $\{v\}$-S βεντάλια με μέγεθος τουλάχιστον $\min\{k, |S|\}$.*

Απόδειξη: Γνωρίζουμε από το Πόρισμα 5.1 ότι το μέγιστο μέγεθος βεντάλιας είναι ίσο με το μέγεθος ενός ελάχιστου $\{v\}$-S διαχωριστή X που δεν περιέχει το v. Φράσσουμε από κάτω το μέγεθος του X.

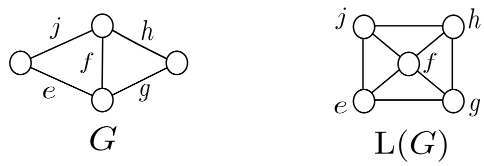
Υπάρχει πάντα διαχωριστής μεγέθους $|S|$: διάλεξε $X = S$. Έστω διαχωριστής X που δεν περιέχει όλο το S, δηλ. υπάρχει $u \in S \setminus X$. Στο $G - X$ οι κορυφές v και u βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες, άρα ο X είναι διαχωριστής του γραφήματος G. Αφού το G είναι k-συνεκτικό, $|X| \geq k$. ∎

Άσκηση 5.1 *Δίνεται γράφημα G και έστω $A, B \subseteq \mathrm{V}(G)$ και $|A| \geq |B|$. Αν το G είναι k-συνεκτικό γράφημα, να δειχθεί ότι υπάρχουν τουλάχιστον $\min\{k, |B|\}$ διακεκριμένα A-B μονοπάτια.*

5.3 Γραμμικό γράφημα και ακμοσυνεκτικότητα

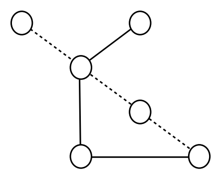
Το εργαλείο που θα χρησιμοποιήσουμε για να ανάγουμε αποδείξεις ακμοσυνεκτικότητας σε κορυφοσυνεκτικότητα είναι η έννοια του γραμμικού γραφήματος.

Ορισμός 5.2 Γραμμικό γράφημα (line graph) *του* G *είναι το γράφημα* $\mathrm{L}(G) = (\mathrm{E}(G), J)$, *όπου* $J = \{\{e, f\} \mid e, f \in \mathrm{E}(G) \wedge (\exists u, v, w \in \mathrm{V}(G) : u \neq w \wedge e = \{u, v\} \wedge f = \{v, w\})\}$.



Σχήμα 5.3: Ένα παράδειγμα γραμμικού γραφήματος.

Παρατήρηση 5.5 *Ένα σύνολο* k *διακεκριμένων μονοπατιών στο* $\mathrm{L}(G)$ *αντιστοιχεί σε ένα σύνολο* k *ακμοδιακεκριμένων μονοπατιών στο* G.



Σχήμα 5.4: Δύο ακμοδιακεκριμένα μονοπάτια μήκους 3.