Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 7: 2.11.2016 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Βασίλης Μαργώνης & Σ. Κ.

7.1 Εφαρμογές του Θεωρήματος του Hall

Πόρισμα 7.1 (Ελλειμματική εκδοχή Θεωρήματος Hall) *Δίνεται διμερές γράφημα* $G = (A \cup B, E)$. *Εάν υπάρχει* $d \in \mathbb{N}$ *τ. ώ.*

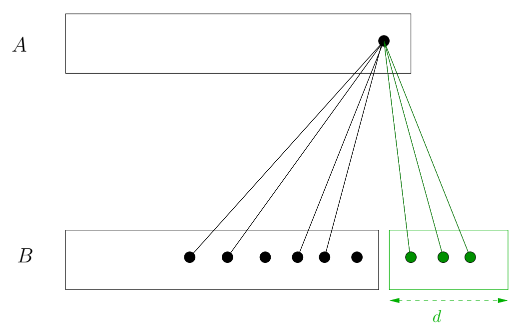
$$|N(S)| \geq |S| - d, \;\; \forall S \subseteq A$$

τότε το G *περιέχει ταίριασμα μεγέθους* $|A| - d$.

Απόδειξη: Προσθέτουμε d το πλήθος κορυφές και ενώνουμε την κάθε μία από αυτές με όλες τις κορυφές του A. Έστω G' το προκύπτον διμερές γράφημα. Βλ. Σχήμα 7.1. Παίρνουμε ότι

$$\forall S \subseteq A, \; |N_{G'}(S)| \geq |N_G(S)| + d \geq |S| - d + d = |S|.$$

Επομένως από το Θεώρημα του Hall (Θεώρημα 6.2) το G' έχει ταίριασμα M του A. Τουλάχιστον $|A| - d$ από τις ακμές του M είναι ακμές του G. Άρα το G έχει ταίριασμα μεγέθους $|A| - d$. ∎



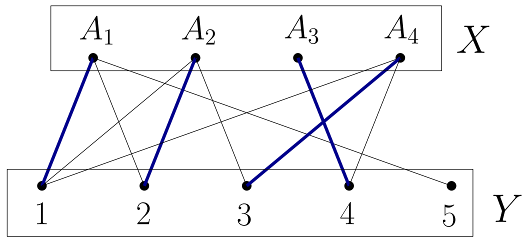
Σχήμα 7.1: Κατασκευή του G' στην απόδειξη του Πορίσματος 7.1.

Αν $n \in \mathbb{N}$, με $[n]$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{1, \ldots, n\}$.

Ορισμός 7.1 *Έστω* $A_1, \ldots, A_n$ *μια συλλογή πεπερασμένων συνόλων. Οικογένεια* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *καλείται* Σύστημα Διακεκριμένων Αντιπροσώπων (ΣΔΑ) *αν* $\forall i \in [n]$, *τα* a_i *είναι διακεκριμένα και* $a_i \in A_i$.

Πόρισμα 7.2 *Μια συλλογή συνόλων* $A_1, \ldots, A_n$ *έχει* ΣΔΑ *αν και μόνο αν* $\forall I \subseteq [n]$ *ισχύει ότι* $|\bigcup_{i \in I} A_i| \geq |I|$.

Απόδειξη: Κατασκευάζουμε ένα διμερές γράφημα $G = (X \cup Y, E)$ ως εξής. Θέτουμε $X = \{A_1, \ldots, A_n\}$ και $Y = \bigcup_{i \in [n]} A_i$. Επιπλέον, $\{A_i, a\} \in E$ αν και μόνο αν $a \in A_i$. Παρατηρούμε ότι κάθε ΣΔΑ της συλλογής $A_1, \ldots, A_n$ αντιστοιχεί σε ταίριασμα του X και αντιστρόφως. Το πόρισμα προκύπτει άμεσα εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Hall (Θεώρημα 6.2) στο G. Βλ. Σχήμα 7.2. ∎

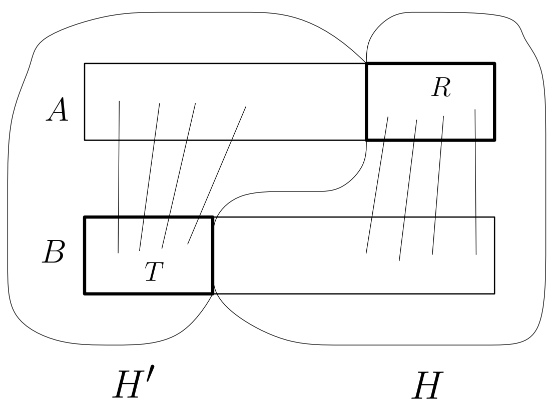


Σχήμα 7.2: Παράδειγμα για το Πόρισμα 7.2, όπου: $A_1 = \{1, 2, 5\}$, $A_2 = \{1, 2, 3\}$, $A_3 = \{4\}$, $A_4 = \{1, 3, 4\}$.

Θεώρημα 7.1 (Kőnig, 1931) *Έστω* $G = (A \cup B, E)$ *διμερές γράφημα. Τότε* $\nu(G) = \tau(G)$.

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ήδη από την Πρόταση 6.1 ότι $\nu(G) \leq \tau(G)$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\nu(G) \geq \tau(G)$.

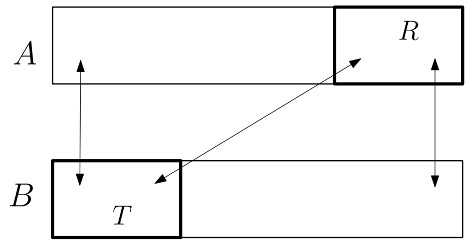
Έστω $U \subseteq V(G)$ κάλυμμα κορυφών ελάχιστου μεγέθους. Θα δείξουμε ότι στο G υπάρχει ταίριασμα μεγέθους $|U|$. Θέτουμε $R = U \cap A$ και $T = U \cap B$. Έστω H, H' εναγόμενα υπογραφήματα του G τέτοια ώστε $H = G[R \cup (B \setminus T)]$ και $H' = G[T \cup (A \setminus R)]$. Βλ. Σχήμα 7.3. Θα δείξουμε ότι το H έχει ταίριασμα μεγέθους $|R|$ και το H' ταίριασμα μεγέθους $|T|$.



Σχήμα 7.3: Απεικόνιση κατασκευής των υπογραφημάτων H και H'.

Αφού το $U = R \cup T$ είναι κάλυμμα κορυφών του G, στο G δεν υπάρχει ακμή από το $A \setminus R$ στο $B \setminus T$. Βλ. Σχήμα 7.4.

Έστω $S \subseteq R$ και $N_H(S) \subseteq B \setminus T$. Το $N_H(S)$ καλύπτει όλες τις ακμές που προσπίπτουν στο S και δεν προσπίπτουν στο T. Αν $|N_H(S)| < |S|$, τότε μπορούμε στο U να αντικαταστήσουμε το S με το $N_H(S)$ και να πάρουμε κάλυμμα κορυφών του G μικρότερου μεγέθους, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως η συνθήκη (6.1) του Θ. Hall ισχύει στο H, και παίρνουμε ταίριασμα M_H του R. Ομοίως στο H' παίρνουμε ταίριασμα $M_{H'}$ του T. Εκ κατασκευής, το $M_H \cup M_{H'}$ είναι ταίριασμα στο G μεγέθους $|U|$. ∎



Σχήμα 7.4: Τα τρία είδη ακμών που υπάρχουν στο G.

7.2 Ανεξάρτητα σύνολα κορυφών, καλύμματα ακμών

Ορισμός 7.2 *Έστω γράφημα $G = (V, E)$ και $S \subseteq V$. Το S λέγεται* ανεξάρτητο σύνολο (independent set, stable set) *αν $\forall v, u \in S$, $\{v, u\} \notin E$.*

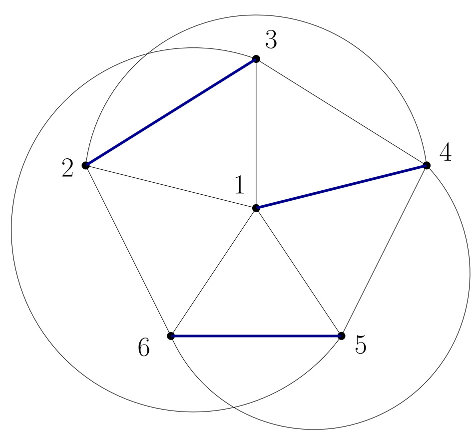
Συμβολίζουμε με $\alpha(G)$ τον πληθάριθμο του μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου του G, δηλ.

$$\alpha(G) = \max_{S \subseteq V(G)} |S|, \text{ όπου } S \text{ ανεξάρτητο.}$$

Παρατήρηση 7.1 *Το $S \subseteq V(G)$ είναι ανεξάρτητο αν και μόνο αν το $V(G) \setminus S$ είναι κάλυμμα κορυφών. Όλες οι ακμές του $E(G)$ προσπίπτουν σε τουλάχιστον μια κορυφή του $V(G) \setminus S$ ανν το S ανεξάρτητο.*

Πρόταση 7.1 *Σε κάθε γράφημα $G = (V, E)$ ισχύει ότι $\alpha(G) + \tau(G) = |V|$.*

Ορισμός 7.3 *Έστω γράφημα $G = (V, E)$ και $F \subseteq E$. Το F λέγεται* κάλυμμα ακμών (edge cover) *αν $\forall v \in V$, $\exists e \in E$ τέτοια ώστε $v \in e$.*



Σχήμα 7.5: Παράδειγμα ενός καλύμματος ακμών μεγέθους 3.

Συμβολίζουμε με $\rho(G)$ τον πληθάριθμο του ελάχιστου καλύμματος ακμών του G, δηλ.

$$\rho(G) = \min_{F \subseteq E(G)} |F|, \text{ όπου } F \text{ κάλυμμα ακμών.}$$

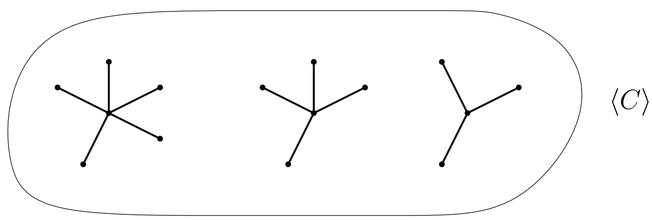
Παρατήρηση 7.2 *Αν $F \subseteq E(G)$ είναι κάλυμμα ακμών ενός γραφήματος G, δεν έπεται ότι το $E(G) \setminus F$ είναι ταίριασμα.*

Πρόταση 7.2 *Σε κάθε γράφημα $G = (V, E)$ που δεν έχει απομονωμένη κορυφή (βαθμού 0) ισχύει ότι $\nu(G) + \rho(G) = |V|$.*

Απόδειξη: Έστω $C \subseteq E$ κάλυμμα ακμών του G τέτοιο ώστε $|C| = \rho(G)$. Ορίζουμε το υπογράφημα $\langle C \rangle := (V, C)$.

Ονομάζουμε ένα γράφημα *αστέρι* αν είναι ισόμορφο με το $K_{1,t}$ για κάποιο $t \geq 1$. Το C ως ελάχιστο είναι και ελαχιστικό, άρα οι συνεκτικές συνιστώσες του γραφήματος $\langle C \rangle$ είναι αστέρια, όπως στο Σχήμα 7.6. Αν k είναι το πλήθος των συνιστωσών (δηλ. αστεριών) του δάσους $\langle C \rangle$, τότε ισχύει ότι $k = |V| - \rho(G)$. Κάθε αστέρι του $\langle C \rangle$ περιέχει τουλάχιστον μια ακμή. Αν πάρουμε μια ακμή απο κάθε συνιστώσα, παίρνουμε ταίριασμα M μεγέθους k. Άρα:

$$\nu(G) \geq k = |V| - \rho(G) \Rightarrow \nu(G) + \rho(G) \geq |V| \tag{7.1}$$



Σχήμα 7.6: Απεικόνιση του $\langle C \rangle$.

Έστω τώρα M_0 ένα μέγιστο ταίριασμα στο G και U το σύνολο των κορυφών που δεν καλύπτονται απο το M_0. Προφανώς το U είναι ανεξάρτητο (independent set) στο G. Αφού το G δεν έχει απομονωμένες κορυφές, μπορούμε για κάθε μια από τις $|V| - 2\nu(G)$ κορυφές του U να διαλέξουμε μια ακμή που την καλύπτει. Το σύνολο των ακμών που διαλέξαμε το ονομάζουμε S και έπεται ότι:

$$\rho(G) \leq |M_0 \cup S| = \nu(G) + |V| - 2\nu(G) = |V| - \nu(G) \Rightarrow \nu(G) + \rho(G) \leq |V| \tag{7.2}$$

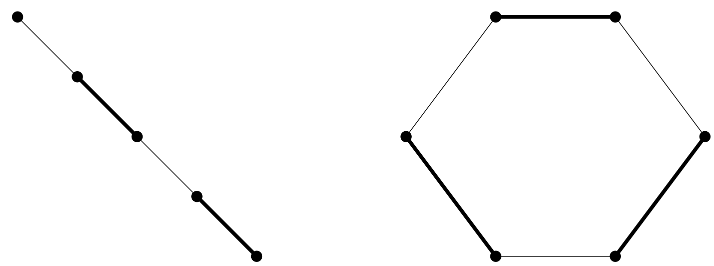
Από τις σχέσεις (7.1) και (7.2) παίρνουμε το ζητούμενο. ∎

Η απόδειξη της Πρότασης 7.2 υποδεικνύει έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο για την εύρεση ελάχιστου καλύμματος ακμών. Υπολόγισε ένα μέγιστο ταίριασμα M και κάλυψε με άπληστο τρόπο (με μία ακμή ανά κορυφή) τις $|V| - 2\nu(G)$ κορυφές που δεν καλύπτει το M. Τελικά χρησιμοποιούμε $|V| - \nu(G) = \rho(G)$ ακμές που είναι το βέλτιστο.

Πόρισμα 7.3 *Υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για τον υπολογισμό του ελάχιστου καλύμματος ακμών.*

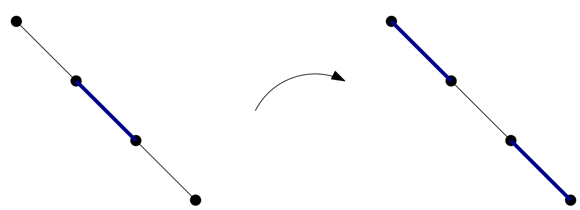
7.3 Εναλλασσόμενα μονοπάτια, Συνθήκη του Tutte

Ορισμός 7.4 *Έστω γράφημα $G = (V, E)$ και ένα ταίριασμα $M \subseteq E$.* M-εναλλασσόμενο (M-alternating) μονοπάτι (ή κύκλος) *στο G είναι ένα μονοπάτι (αντίστοιχα κύκλος) του οποίου οι ακμές ανήκουν εναλλάξ στο M και το $E \setminus M$.*



Σχήμα 7.7: Παράδειγμα ενός εναλλασσόμενου μονοπατιού και ενός εναλλασσόμενου κύκλου. Οι έντονες ακμές ανήκουν στο M και οι υπόλοιπες στο $E \setminus M$.

Ένα M-εναλλασσόμενο μονοπάτι $P = (v_1, \ldots, v_k)$, $k \geq 4$, του G του οποίου τα άκρα v_1 και v_k δεν καλύπτονται από το M καλείται *M-αυξητικό (M-augmenting)*. Εάν το υποκείμενο ταίριασμα εννοείται από τα συμφραζόμενα θα αναφερόμαστε απλά σε εναλλασσόμενο ή αυξητικό μονοπάτι. Το σύνολο $M' = (M \setminus E(P)) \cup (E(P) \setminus M)$ είναι ταίριασμα στο G με την ιδιότητα $|M'| = |M| + 1$. Βλ. Σχήμα 7.8. Επομένως αν το M είναι μέγιστο, δεν υπάρχει αυξητικό μονοπάτι. Θα αποδείξουμε ότι τα μέγιστα ταιριάσματα χαρακτηρίζονται από την απουσία αυξητικών μονοπατιών. Με άλλα λόγια η συνθήκη (απουσία αυξητικού μονοπατιού) είναι αναγκαία και ικανή.

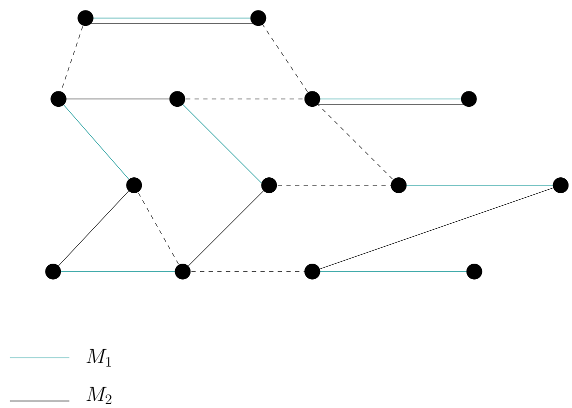


Σχήμα 7.8: Παράδειγμα ενός αυξητικού μονοπατιού.

Ορισμός 7.5 *Η συμμετρική διαφορά δύο συνόλων A, B συμβολίζεται $A \triangle B$ και ορίζεται ως το σύνολο $(A - B) \cup (B - A)$.*

Λήμμα 7.1 *Δίνονται δύο ταιριάσματα M, M'. Κάθε συνεκτική συνιστώσα της συμμετρικής τους διαφοράς είναι μονοπάτι ή άρτιος κύκλος.*

Απόδειξη: Έστω $F = M \triangle M'$. Αφού τα M, M' είναι ταιριάσματα, το πολύ μία ακμή από το καθένα προσπίπτει σε μία κορυφή. Επομένως στο F το πολύ δύο ακμές προσπίπτουν σε κάθε κορυφή. Έχουμε λοιπόν γράφημα με μέγιστο βαθμό 2, άρα κάθε συνεκτική συνιστώσα πρέπει να είναι κύκλος ή μονοπάτι. Επιπλέον, σε κάθε κύκλο ή μονοπάτι οι ακμές εναλλάσσονται ανάμεσα σε ακμές του $M - M'$ και ακμές του $M' - M$. Επομένως κάθε κύκλος έχει άρτιο μήκος με ίσο πλήθος ακμών από τα δύο σύνολα. ∎



Σχήμα 7.9: Δύο ταιριάσματα M_1, M_2. Οι διακεκομμένες ακμές δεν ανήκουν σε κανένα από τα δύο. Η συμμετρική διαφορά $M_1 \triangle M_2$ αποτελείται από έναν κύκλο μήκους 6 και ένα μονοπάτι μήκους 3.

Στο Σχήμα 7.9 δίνουμε ένα παράδειγμα της συμμετρικής διαφοράς δύο ταιριασμάτων.

Θεώρημα 7.2 (Berge, 1957) *Ένα ταίριασμα M του γραφήματος G είναι μέγιστο αν και μόνο αν το G δεν περιέχει M-αυξητικό μονοπάτι.*

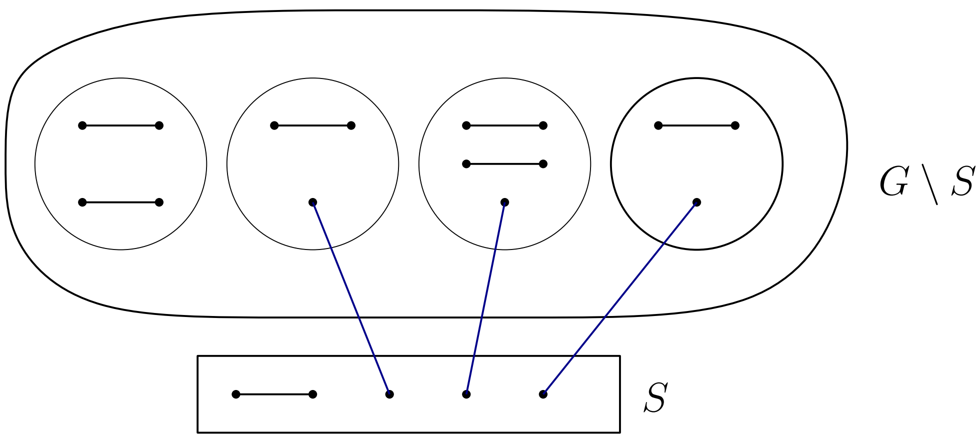
Απόδειξη: Το ευθύ είναι προφανές. Για το αντίστροφο αποδεικνύουμε με αντιθετοαντιστροφή.

Έστω M και M' ταιριάσματα με $|M'| > |M|$. Ορίζουμε $F = M \triangle M'$. Από το Λήμμα 7.1 το F αποτελείται από μονοπάτια και άρτιους κύκλους και οι κύκλοι έχουν τον ίδιο αριθμό ακμών από το M και το M'. Πρέπει λοιπόν σε κάποιο μονοπάτι P να υπάρχουν περισσότερες ακμές από το M'. Ένα τέτοιο μονοπάτι πρέπει να αρχίζει και να τελειώνει με ακμές του M'. Παρατηρήστε ότι τα δύο άκρα του μονοπατιού πρέπει να είναι αταίριαστα στο M. Άρα το P είναι M-αυξητικό μονοπάτι. ∎

Σε ένα γράφημα G, συμβολίζουμε με $q(G)$ το πλήθος των συνιστωσών περιττής τάξης του G.

Παρατήρηση 7.3 *Αν το G έχει τέλειο ταίριασμα, τότε $\forall S \subseteq V(G)$ ισχύει ότι $q(G \setminus S) \leq |S|$.*

Στην επόμενη διάλεξη θα δείξουμε ότι η συνθήκη της Παρατήρησης 7.3, γνωστή και ως Συνθήκη του Tutte, εκτός από αναγκαία είναι και ικανή για την ύπαρξη τέλειου ταιριάσματος.



Σχήμα 7.10: Απεικόνιση της Παρατήρησης 7.3.