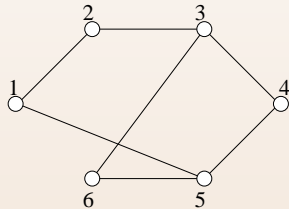


Αριθμοί Ramsey

Πρόταση

Σε κάθε ομάδα 6 ατόμων

- υπάρχουν 3 που γνωρίζονται ανά δυο
- ή υπάρχουν 3 που είναι άγνωστοι ανά δυο.



- Το παραπάνω **δεν** ισχύει για ομάδες των 5 ατόμων.
Αντιπαράδειγμα: Οι πέντε κάθονται σε ένα κυκλικό τραπέζι και ο καθένας γνωρίζει μόνο τους διπλανούς του.

Αριθμοί Ramsey

Μπορούμε να γενικεύσουμε την πρόταση

Θεώρημα

Σε καθε σύνολο 18 ατόμων υπάρχουν 4 που γνωρίζονται ανά δυο ή υπάρχουν 4 που είναι άγνωστοι ανά δυο.

Απόδειξη.

Δοκίμασε όλες τις περιπτώσεις. Όμως τώρα οι περιπτώσεις είναι πάρα πολλές.

Αριθμοί Ramsey

Θεώρημα

Σε κάθε σύνολο 49 ατόμων υπάρχουν 5 που γνωρίζονται ανά δυο ή υπάρχουν 5 που είναι άγνωστοι ανά δυο.

Απόδειξη.

Η εξαντλητική μέθοδος δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί γιατί σήμερα είναι υπολογιστικά ανέφικτη.

Μαθηματική επαγωγή

Έστω $P(n)$ μια υπόθεση που αφορά τους φυσικούς αριθμούς. Για να αποδείξουμε την υπόθεση με επαγωγή

- Δείχνουμε ότι ισχύει για $n = 1$: $P(1)$
- Δείχνουμε για κάθε n : αν ισχύει για n τότε θα ισχύει για $n + 1$:

$$P(n) \Rightarrow P(n + 1)$$

Παράδειγμα - H_k

Παράδειγμα - H_k

- Ο αρμονικός αριθμός H_k ορίζεται σαν

$$H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}$$

- Τι μεγέθους είναι ο H_k ;

Λήμμα

Να δειχτεί ότι για κάθε φυσικό n : $H_{2^n} \leq 1 + n$.

Απόδειξη.

Βάση της επαγωγής: Για $n = 1$ έχουμε $H_{2^1} = H_2 = 3/2$ και $1 + n = 2$ και επομένως το λήμμα ισχύει: $3/2 \leq 2$.

Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι το λήμμα ισχύει για κάποιο φυσικό αριθμό n : $H_{2^n} \leq 1 + n$.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n + 1$, δηλαδή ότι $H_{2^{n+1}} \leq 1 + (n + 1)$. □

Παράδειγμα - H_k

Μαθηματική επαγωγή - γενικεύσεις

Απόδειξη (συνέχ.)

Έχουμε

$$\begin{aligned} H_{2^{n+1}} &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{2^n + 1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &= H_{2^n} + \left(\frac{1}{2^n + 1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &\leq (1 + n) + \left(\frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &= (1 + n) + 2^n \frac{1}{2^n} = (1 + n) + 1 = 1 + (n + 1). \end{aligned}$$

Κάποιες κοινές παραλλαγές της επαγωγής

- Η βάση δεν είναι πάντα για $n = 1$. Π.χ., για θεωρήματα της μορφής «Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 4$: ...» η βάση είναι $n = 4$.
- Η επαγωγική υπόθεση είναι ότι η πρόταση ισχύει για **όλους** τους μικρότερους αριθμούς:

$$P(1), \dots, P(n) \Rightarrow P(n + 1)$$

Αυτή είναι η λεγόμενη **Ισχυρή Επαγωγή**.

Οι αριθμοί Fibonacci

Συνδυαστική ερμηνεία των αριθμών Fibonacci

Οι αριθμοί Fibonacci ορίζονται ως εξής:

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1,$$

και για κάθε $n \geq 2$:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Λήμμα

Να δειχτεί ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 0$,

$$F_n \leq \phi^n,$$

όπου $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$ είναι η χρυσή τομή.

Θεώρημα

Για κάθε θετικό ακέραιο n : $\frac{1}{2}\phi^n \leq F_n \leq \phi^n$.

Ορίζουμε J_n ως τον αριθμό των τρόπων να γράψουμε το n ως άθροισμα άκολουθιών που αποτελούνται από 1 και 2. Π.χ., $J_4 = 5$ γιατί

$$1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2.$$

Ομοίως $J_1 = 1, J_2 = 2, J_3 = 3$ κοκ. Ορίζουμε $J_0 := 1$, και παίρνουμε (πώς;) για κάθε $n \geq 2$:

$$J_n = J_{n-1} + J_{n-2}$$

Άρα $J_n = F_n$, για κάθε n . Ισοδύναμα, J_n είναι ο αριθμός των τρόπων να ανέβεις μια σκάλα με n σκαλοπάτια αν κάθε φορά ανεβαίνεις ένα ή δύο σκαλιά ...

Οι αριθμοί Fibonacci

(Επαγωγικές) Αποδείξεις στη Στοιχειώδη Αριθμοθεωρία

Θεώρημα

Να δειχτεί ότι για κάθε ακέραιους $n, m \geq 1$, οι αριθμοί Fibonacci ικανοποιούν τη σχέση

$$F_{n+m} = F_n F_m + F_{n-1} F_{m-1}.$$

Το θεώρημα μας επιτρέπει να υπολογίσουμε ένα αριθμό Fibonacci χωρίς να υπολογίσουμε όλους τους προηγούμενους.

$$F_{2k+1} = F_{k+1}F_k + F_kF_{k-1} = (F_k + F_{k-1})F_k + F_kF_{k-1} = F_k^2 + 2F_kF_{k-1}$$

$$F_{2k} = F_kF_k + F_{k-1}F_{k-1} = F_k^2 + F_{k-1}^2$$

Παράδειγμα:

$$F_{31} = F_{15}^2 + 2F_{15}F_{14}$$

$$F_{15} = F_7^2 + 2F_7F_6$$

$$F_{14} = F_7^2 + F_6^2 \qquad F_7 = \dots, F_6 = \dots$$

Ορισμός

Ένας θετικός ακέραιος $p > 1$, καλείται **πρώτος** αν δεν μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο δύο ακεραίων a, b με $1 < a, b < p$.

Θεώρημα

Κάθε θετικός ακέραιος $n \geq 2$ μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο πρώτων αριθμών.

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης

Αλγόριθμος για το Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη

Για $a, b \in \mathbb{Z}$, λέμε ότι ο a **διαιρεί** τον b (συμβολίζεται με $a \mid b$), αν υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$, τέτοιο ώστε $b = ka$.

$$\gcd(a, b) = \begin{cases} a & \text{αν } b = 0 \\ \gcd(b, a \bmod b) & \text{αν } b > 0. \end{cases}$$

Ορισμός

Για $a, b \in \mathbb{Z}$, ο **μέγιστος κοινός διαιρέτης** των a και b (συμβολίζεται με $\gcd(a, b)$), ορίζεται ως ο μεγαλύτερος ακέραιος d τ.ω. $d \mid a$ και $d \mid b$.

Αλγόριθμος του Ευκλείδη

```

1: function EUCLID(a, b)           ▷ Υποθέτουμε ότι  $a \geq b$ 
2:   if b = 0 then
3:     return a                     ▷  $\gcd(a, 0) = a$ 
4:   else
5:      $\delta \leftarrow \text{EUCLID}(b, a \bmod b)$    ▷  $\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$ 
6:     return  $\delta$ 
7:   end if
8: end function
  
```

Εξ ορισμού, όλοι οι ακέραιοι διαιρούν το 0. Άρα $\gcd(0, b) = b$. Ορίζουμε $\gcd(0, 0) := 0$.

Ορθότητα του Αλγορίθμου του Ευκλείδη

Πολυπλοκότητα του Αλγορίθμου του Ευκλείδη

Θα αποδείξουμε με τη σειρά τις εξής προτάσεις.

Λήμμα (Bézout)

Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$, όχι και οι δύο μηδέν. Τότε $\gcd(a, b) = \min\{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}, ax + by > 0\}$.

- Πόσα βήματα κάνει ο αλγόριθμος για να υπολογίσει τον μέγιστο κοινό διαιρέτη δυο αριθμών; Εξαρτάται από τους αριθμούς. Θέλουμε μια εκτίμηση για τη **χειρότερη** περίπτωση.
- Το Θεώρημα του Lamé (δεν θα το αποδείξουμε) λέει ότι ο αριθμός των διαιρέσεων, ή ισοδύναμα οι φορές που υπολογίζουμε το $a \bmod b$, είναι λιγότερες από $k - 1$ όταν $a > b \geq 1$ και $b < F_k$.
- Εδώ θα δείξουμε ένα πιο απλό αποτέλεσμα.

Λήμμα

Αν $d \mid a$ και $d \mid b$, τότε $d \mid \gcd(a, b)$.

Θεώρημα

Για ακέραιους $a \geq 0$ και $b > 0$, $\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$.

Πολυπλοκότητα του Αλγορίθμου του Ευκλείδη

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός των διαιρέσεων ισούται με τον αριθμό r των αναδρομικών κλήσεων που εκτελεί ο αλγόριθμος. Συνεπώς ο αριθμός βημάτων του αλγορίθμου είναι $O(r)$.

Θεώρημα

Για κάθε θετικούς ακέραιους a, b με $a \geq 2$ και $a \geq b$, ο αριθμός των διαιρέσεων του αλγορίθμου του Ευκλείδη δεν ξεπερνά το $2 \log a$.

Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμοθεωρίας

Λήμμα

Αν $a \mid bc$ και $\gcd(a, b) = 1$, τότε $a \mid c$.

Λήμμα

Αν p πρώτος και $p \mid bc$, τότε $p \mid b$ ή $p \mid c$.

Λήμμα

Αν p πρώτος και $p \mid a_1 a_2 \dots a_n$, τότε ο p διαιρεί κάποιο a_i .

Θεώρημα

Κάθε θετικός ακέραιος $n \geq 2$ μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων αριθμών:

$$n = p_1 \cdot p_2 \dots p_j, (p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_j).$$

Ισχυροποίηση της πρότασης

Κάποιες φορές για να αποδείξουμε μια πρόταση με μαθηματική επαγωγή, παραδόξως μας συμφέρει να την ισχυροποιήσουμε. Παράδειγμα:

Πρόταση

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2.$$

Απόδειξη.

Ας χρησιμοποιήσουμε επαγωγή και ας υποθέσουμε ότι η πρόταση ισχύει για κάποιο n . Προσθέτουμε και στα δυο μέλη το $\frac{1}{(n+1)^2}$. Αλλά, τώρα το δεξιό μέλος είναι $2 + \frac{1}{(n+1)^2}$ που δεν είναι μικρότερο του 2. Η προσέγγιση αυτή αποτυγχάνει. Είναι εύκολο όμως να δείξουμε την πιο ισχυρή πρόταση

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}. \quad \square$$

Θεωρία Ramsey



Frank P. Ramsey (1903-1930)

