Μαθηματικά Πληροφορικής

7ο Μάθημα

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ταιριάσματα (matchings)

Ορισμός (Ταίριασμα)

Έστω γράφημα $G = (V, E)$. Ταίριασμα καλείται ένα σύνολο $M \subseteq E$, τέτοιο ώστε κάθε κόμβος του V ανήκει το πολύ σε μία ακμή του M. Το μέγεθος του ταιριάσματος είναι το $|M|$.

Ένα ταίριασμα M καλείται ταίριασμα του $U \subseteq V$, αν σε κάθε κορυφή του U προσπίπτει μία ακμή του M. Ταίρι του $u \in U$ καλείται η μοναδική κορυφή $v \in U$ για την οποία $\{u, v\} \in M$. Μια κορυφή χωρίς ταίρι, καλείται αταίριαστη.

Ένα ταίριασμα του V καλείται πλήρες ή τέλειο (perfect matching). Δεν έχουν όλα τα γραφήματα πλήρες ταίριασμα.

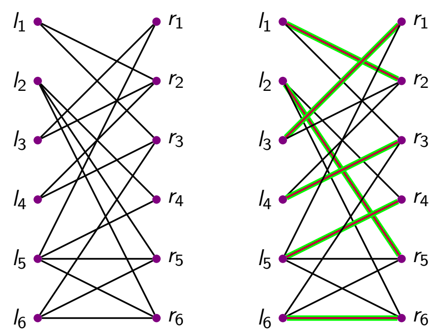
Διμερή Γραφήματα

Ορισμός (Διμερές γράφημα)

Ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται διμερές αν $V = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$, και για κάθε $\{u, v\} \in E$, $u \in A, v \in B$.

Ένα διμερές γράφημα $G = (V, E)$ με διαμέριση $\{A, B\}$ θα το συμβολίζουμε ως $G = (A \cup B, E)$.

Ταιριάσματα (matchings)



(a) (b)

Σχήμα: Διμερές γράφημα (a) και ένα πλήρες ταίριασμα (b)

Ορισμός (Πρόβλημα πλήρους ταιριάσματος σε διμερή γραφήματα)

Δοθέντος ενός διμερούς γραφήματος, υπάρχει πλήρες ταίριασμα;

Θεώρημα του Hall

Για $S \subseteq V$, συμβολίζουμε με $\Gamma(S)$ το σύνολο των γειτόνων του S.

Θεώρημα (Hall)

Ένα διμερές γράφημα $G = (L \cup R, E)$ με ίσο αριθμό κόμβων στα δυο μέρη L και R, περιέχει τέλειο ταίριασμα αν και μόνο αν για κάθε υποσύνολο S του L

$$|S| \leq |\Gamma(S)|.$$

Θεώρημα του Hall

Για $S \subseteq V$, συμβολίζουμε με $\Gamma(S)$ το σύνολο των γειτόνων του S.

Θεώρημα (Hall)

Ένα διμερές γράφημα $G = (L \cup R, E)$ με ίσο αριθμό κόμβων στα δυο μέρη L και R, περιέχει τέλειο ταίριασμα αν και μόνο αν για κάθε υποσύνολο S του L

$$|S| \leq |\Gamma(S)|.$$

Απόδειξη ($\Rightarrow$)

Η συνθήκη του Hall είναι ξεκάθαρα αναγκαία. Αν υπάρχει ταίριασμα M του L, τότε πράγματι για κάθε υποσύνολο S του L

$$|S| \leq |\Gamma(S)|.$$

Τα ταίρια των κορυφών του S στο M είναι ακριβώς $|S|$ το πλήθος και ανήκουν στο $\Gamma(S)$.

Απόδειξη του Θεωρήματος του Hall ($\Leftarrow$)

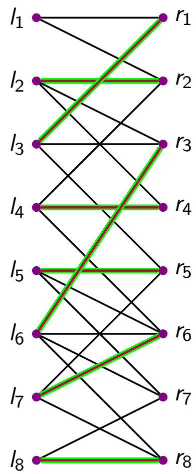
Απομένει να δείξουμε ότι η συνθήκη του Hall είναι και ικανή.

Ορισμός

Έστω M ταίριασμα (όχι απαραίτητα τέλειο). Εναλλασσόμενο μονοπάτι ονομάζεται ένα μονοπάτι P που ξεκινάει από αταίριαστη κορυφή και του οποίου οι ακμές ανήκουν εναλλάξ στο $E \setminus M$ και το M. Αυξητικό μονοπάτι ονομάζεται ένα εναλλασσόμενο μονοπάτι που τελειώνει σε αταίριαστη κορυφή.

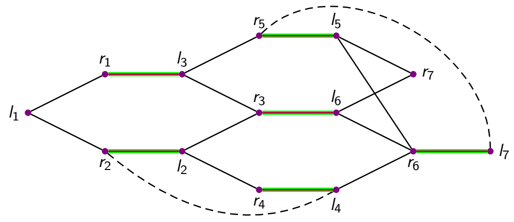
Θα αποδείξουμε κατασκευαστικά πως αν ισχύει η συνθήκη και έχουμε μερικό ταίριασμα του L, μπορούμε πάντα να βρούμε αυξητικό μονοπάτι ξεκινώντας από αταίριαστη κορυφή $u \in L$.

Απόδειξη του Θεωρήματος του Hall ($\Leftarrow$)

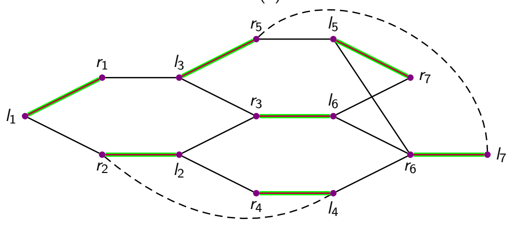


Σχήμα: Ένα μερικό ταίριασμα

Απόδειξη του Θεωρήματος του Hall ($\Leftarrow$)



(a)



(b)

Σχήμα: (a) Ξεδιπλώνουμε το γράφημα από το l_1. (b) Παίρνουμε ένα καλύτερο ταίριασμα εναλλάσοντας τις ακμές στο μονοπάτι $(l_1, r_1, l_3, r_5, l_5, r_7)$.

Απόδειξη του Θεωρήματος του Hall ($\Leftarrow$)

Για $S \subseteq R$,

$$M(S) := \{u \in L \mid \exists v \in S \ \{u, v\} \in M\}.$$

Δηλ. $M(S)$ είναι τα ταίρια των κορυφών του S.

- Δίνουμε αλγόριθμο που ξεκινώντας από αταίριαστη κορυφή $u \in L$ ψάχνει για αυξητικό μονοπάτι.
- Ο αλγόριθμος επισκέπτεται τις κορυφές ανά «επίπεδα» όπου διαδοχικά επίπεδα αντιστοιχούν σε διαφορετικές μεριές του G, δηλ. στο L και στο R.

$$L_0, R_1, L_1, R_2, L_2, \ldots$$

- Αρχικά $L_0 = \{u\}$ και $R_1 = \Gamma(L_0)$. Μετά $L_1 = M(R_1)$, $R_2 = \Gamma(L_2)$ κοκ.

Αλγόριθμος για αυξητικό μονοπάτι

```
1  L_0 := {u}                        // u ∉ M(R), δηλαδή αταίριαστη
2  R_1 := Γ(L_0)
3  SeenL := L_0   SeenR := R_1
4  i := 1
5  while ( όλες οι κορυφές του R_i ταιριασμένες and R_i ≠ ∅ ) do
6  |   L_i := M(R_i)
7  |   R_{i+1} := Γ(L_i) \ SeenR
8  |   SeenL := SeenL ∪ L_i
9  |   SeenR := SeenR ∪ R_{i+1}
10 |   i := i + 1
11 end
12 if υπάρχει αταίριαστη κορυφή στο R_i then
13 |   return «βρέθηκε αυξητικό μονοπάτι»
14 end
```

Αλγόριθμος για αυξητικό μονοπάτι

Από τη Γραμμή 6 του Αλγορίθμου,

$$\forall i, \quad |R_i| = |L_i|. \tag{1}$$

Αν το while-loop τερματίσει και δεν έχουμε βρει αυξητικό μονοπάτι, το «τελευταίο» $R_{i+1} = \varnothing$ και το «ξεδίπλωμα» του γραφήματος σταματάει σε κορυφές του L.

Άρα

$$|\text{SeenR}| = \sum_{i=1} |R_i| \overset{(1)}{=} \sum_{i=1} |L_i| = |\text{SeenL}| - 1$$

γιατί $\text{SeenL} = \{u\} \cup \left(\bigcup_{i=1} L_i\right)$.

Εκ κατασκευής $\text{SeenR} = \Gamma(\text{SeenL})$. Από συνθήκη Hall, θα έπρεπε $|\text{SeenR}| \geq |\text{SeenL}|$, άτοπο.

Θεώρημα του Hall

Στην πραγματικότητα αποδείξαμε κάτι πιο γενικό:

Θεώρημα (Hall)

Ένα διμερές γράφημα $G = (L \cup R, E)$ περιέχει ταίριασμα του L αν και μόνο αν για κάθε υποσύνολο S του L

$$|S| \leq |\Gamma(S)|.$$

Πόρισμα του Θεωρήματος του Hall

Πόρισμα (Πόρισμα του Θ. του Hall)

Αν σε ένα διμερές γράφημα $G = (L \cup R, E)$ για κάθε υποσύνολο S του L

$$|S| - d \leq |\Gamma(S)|$$

όπου $d \in \{0, 1, \dots, |L|\}$, τότε το G περιέχει ταίριασμα μεγέθους $|L| - d$.