Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 10: 10.11.2016 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Ιωάννης Μπαρούμας

10.1 Βασικές έννοιες τοπολογίας του $\mathbb{R}^2$

Ορισμός 10.1 *Ένα υποσύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^2$ καλείται* ανοιχτό σύνολο, *αν για κάθε $x \in U$ υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε κάθε σημειο $y \in \mathbb{R}^2$ που απέχει το πολύ ϵ από το x να ανήκει επίσης στο U.*

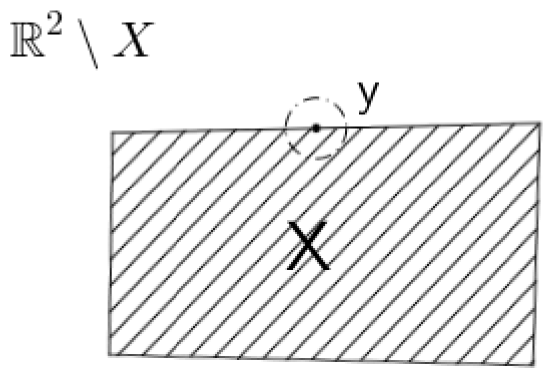
Ορισμός 10.2 *Ένα υποσύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^2$ καλείται* κλειστό σύνολο, *αν είναι το συμπλήρωμα ενός ανοιχτού συνόλου.*

Ορισμός 10.3 Περιοχή (region) *καλείται ένα ανοιχτό σύνολο U, όπου για κάθε $u, v \in U$, υπάρχει μια καμπύλη που τα ενώνει και η καμπύλη αυτή ανήκει εξ ολοκλήρου στο U.*

Ορισμός 10.4 Γειτονιά *ενός σημείου $y \in \mathbb{R}^2$, είναι το σύνολο όλων των σημείων που απέχουν το πολύ απόσταση ϵ από το y, για κάποιο $\epsilon > 0$.*

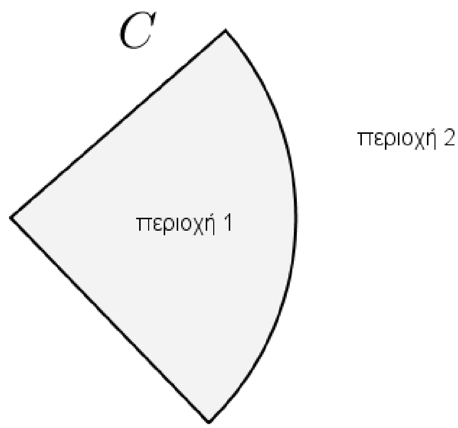
Ορισμός 10.5 Σύνορο (boundary) *ενός $X \subseteq \mathbb{R}^2$, είναι το σύνολο Y όλων των σημείων $y \in \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε κάθε γειτονιά του y να τέμνει και το X και το $\mathbb{R}^2 \setminus X$.*

Στο Σχήμα 10.1 δίνεται ένα παράδειγμα ενός σημείου y που βρίσκεται στο σύνορο ενός συνόλου X.

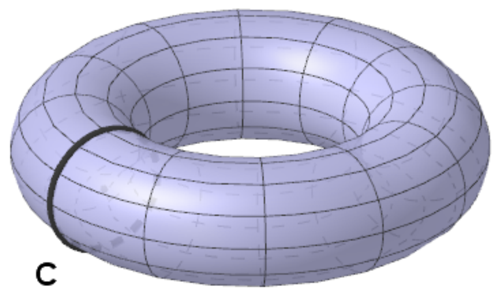


Σχήμα 10.1: Το σημείο y ανήκει στο σύνορο του συνόλου X. Οσοδήποτε μικρό δίσκο και αν σχεδιάσουμε γύρω από το y, αυτός θα έχει ένα μέρος του στο X και ένα στο $\mathbb{R}^2 \setminus X$.

Θεώρημα 10.1 (Jordan, 1887) *Μια απλή, κλειστή καμπύλη C, διαμερίζει το επίπεδο σε ακριβώς δύο περιοχές, οπού η κάθε μια έχει σαν σύνορο τη C.*



Σχήμα 10.2: Οι περιοχές 1 και 2, έχουν σαν σύνορό τους την καμπύλη C.



Σχήμα 10.3: Όπως φαίνεται στο σχήμα, σε ένα τοροειδές, το θεώρημα του *Jordan* δεν ισχύει.

Παράδειγμα μιας τέτοιας καμπύλης δίνεται στο Σχήμα 10.2.

Παρατήρηση 10.1 *Το θεώρημα Jordan δεν ισχύει για κάθε επιφάνεια. Βλ. Σχήμα 10.3.*

Ορισμός 10.6 Εμβάπτιση (ή σχεδιασμός) *ενός γραφήματος $G = (V, E)$ στο επίπεδο, είναι μια συνάρτηση $f : V \bigcup E \to \mathbb{R}^2$ με τις εξής ιδιότητες:*

1. *Κάθε $u \in V$ απεικονίζεται σε σημείο $f(u)$.*
2. *Κάθε ακμή $\{u, v\} \in E$ απεικονίζεται σε μια απλή καμπύλη $f(\{u, v\})$ με άκρα $f(u)$ και $f(v)$.*
3. *Για κάθε $u, v \in V$ ισχύει ότι $f(u) \neq f(v)$ και για κάθε $\{u, v\} \in E$ ισχύει ότι $f(\{u, v\}) \bigcap f(V)) = \{f(u), f(v)\}$.*

Ορισμός 10.7 *Για $e, e' \in E, e \neq e'$, ένα σημείο στην τομή $f(e) \bigcap f(e')$ που δεν είναι κοινό άκρο των $f(e)$ και $f(e')$ καλείται* διασταύρωση (crossing).

10.2 Επίπεδα γραφήματα

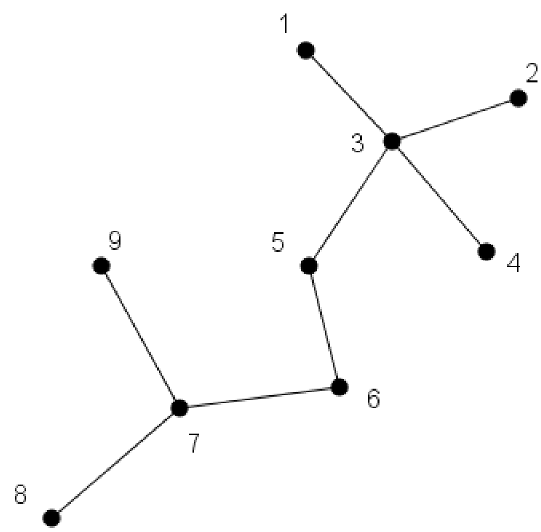
Ορισμός 10.8 *Ένα γράφημα G καλείται* επίπεδο (planar) *αν υπάρχει εμβάπτιση του G στο $\mathbb{R}^2$ χωρίς διασταυρώσεις.*

Στο εξής όταν αναφερόμαστε σε εμβάπτιση ενός επίπεδου γραφήματος θα εννοούμε εμβάπτιση χωρίς διασταυρώσεις ακμών.

Ορισμός 10.9 *Ένα επίπεδο γράφημα εμβαπτισμένο στο επίπεδο καλείται* ενεπίπεδο (plane).

Ορισμός 10.10 Όψεις (faces) *ενός ενεπίπεδου γραφήματος G είναι οι μεγιστικές περιοχές του $\mathbb{R}^2$ που δεν περιέχουν κανένα σημείο που χρησιμοποιείται στην εμβάπτιση, δηλαδή μεγιστικές περιοχές του $\mathbb{R}^2 \setminus G$.*

Παρατήρηση 10.2 *Οι όψεις είναι ανοιχτά σύνολα.*

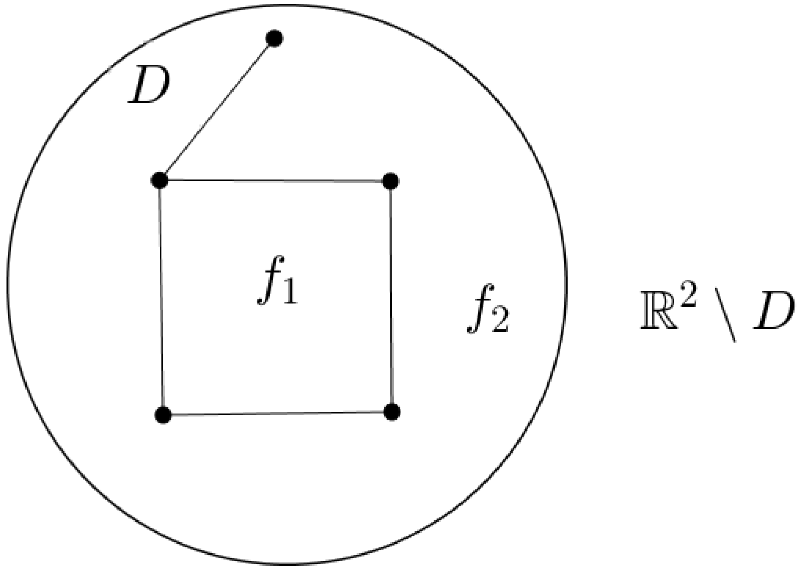


Σχήμα 10.4: Ένα δέντρο έχει ακριβώς μια όψη.

Για κάθε ενεπίπεδο γράφημα G, υπάρχει κλειστός δίσκος D που το περιέχει. Η όψη του G που περιέχει το $\mathbb{R}^2 \setminus D$ καλείται *εξωτερική*. Βλ. Σχήμα 10.5.

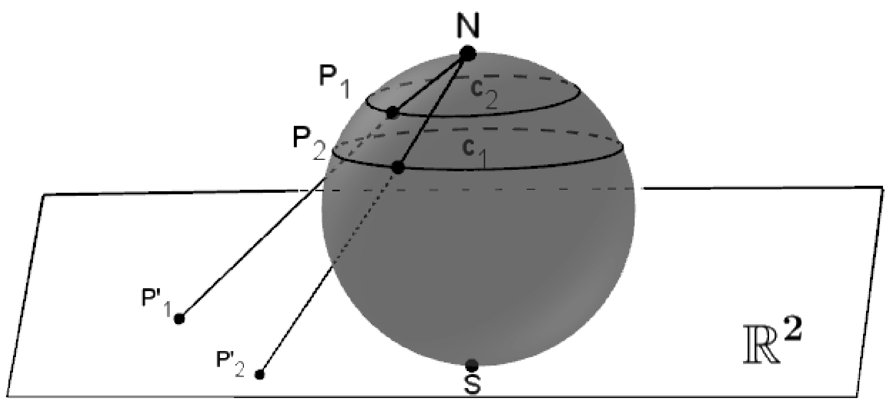
Θεώρημα 10.2 *Αν ένα συνεκτικό επίπεδο γράφημα G, έχει μια εμβάπτιση στο επίπεδο στην οποία κάποια όψη έχει ως σύνορο τον κύκλο $(v_1, v_2, ..., v_k)$, τότε υπάρχει εμβάπτιση του G στο επίπεδο στην οποία η εξωτερική όψη έχει σύνορο τον κύκλο $(v_1, v_2, ..., v_k)$.*

Απόδειξη: Έστω f η όψη που εξετάζουμε. Μεταφέρουμε την εμβάπτιση από το επίπεδο στην σφαίρα (τυπικά αυτό που κάνουμε είναι το αντίστροφο της στερεογραφικής προβολής.) Κάνουμε ολίσθηση



Σχήμα 10.5: Η όψη f_2 περιέχει την $\mathbb{R}^2 \setminus D$, άρα είναι εξωτερική.

της εμβάπτισης πάνω στην σφαίρα S, έτσι ώστε ο βόρειος πόλος N να βρεθεί μέσα στην f. Για να προβάλλουμε από την S στο $\mathbb{R}^2$ τοποθετούμε την S έτσι ώστε ο νότιος πόλος να εφάπτεται του $\mathbb{R}^2$. Για κάθε σημείο P της S με $P \neq N$, η στερεογραφική προβολή του P στο $\mathbb{R}^2$ είναι η τομή της ευθείας που διέρχεται από τα N, P με το $\mathbb{R}^2$. Βλ. Σχήμα 10.6.



Σχήμα 10.6: Αναπαράσταση της στερεογραφικής προβολής.

Ο τύπος της στερεογραφικής προβολής είναι $\varphi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$ (με $z = 1$ να είναι ο βόρειος πόλος) και της αντίστροφης στερεογραφικής προβολής είναι $\varphi^{-1}(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)$ ∎