

## 10.1 Βασικές έννοιες τοπολογίας του $\mathbb{R}^2$

**Ορισμός 10.1** Ένα υποσύνολο  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  καλείται ανοιχτό σύνολο, αν για κάθε  $x \in U$  υπάρχει  $\epsilon > 0$  τέτοιο ώστε κάθε σημείο  $y \in \mathbb{R}^2$  που απέχει το πολύ  $\epsilon$  από το  $x$  να ανήκει επίσης στο  $U$ .

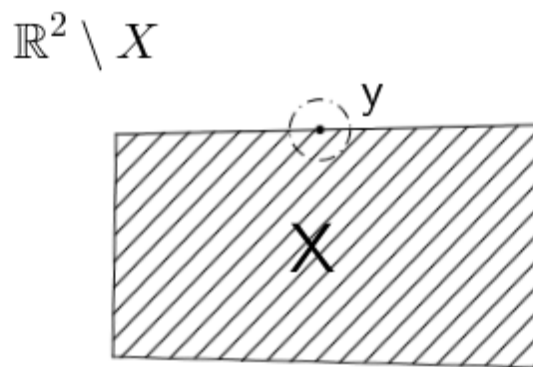
**Ορισμός 10.2** Ένα υποσύνολο  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  καλείται κλειστό σύνολο, αν είναι το συμπλήρωμα ενός ανοιχτού συνόλου.

**Ορισμός 10.3** Περιοχή (region) καλείται ένα ανοιχτό σύνολο  $U$ , όπου για κάθε  $u, v \in U$ , υπάρχει μια καμπύλη που τα ενώνει και η καμπύλη αυτή ανήκει εξ ολοκλήρου στο  $U$ .

**Ορισμός 10.4** Γειτονιά ενός σημείου  $y \in \mathbb{R}^2$ , είναι το σύνολο όλων των σημείων που απέχουν το πολύ απόσταση  $\epsilon$  από το  $y$ , για κάποιο  $\epsilon > 0$ .

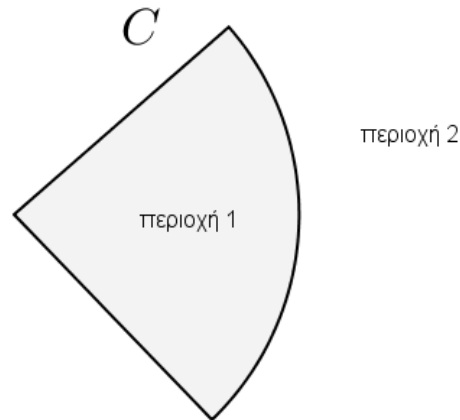
**Ορισμός 10.5** Σύνορο (boundary) ενός  $X \subseteq \mathbb{R}^2$ , είναι το σύνολο  $Y$  όλων των σημείων  $y \in \mathbb{R}^2$  τέτοια ώστε κάθε γειτονιά του  $y$  να τέμνει και το  $X$  και το  $\mathbb{R}^2 \setminus X$ .

Στο Σχήμα 10.1 δίνεται ένα παράδειγμα ενός σημείου  $y$  που βρίσκεται στο σύνορο ενός συνόλου  $X$

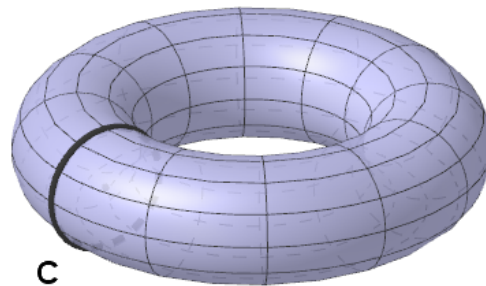


Σχήμα 10.1: Το σημείο  $y$  ανήκει στο σύνορο του συνόλου  $X$ . Οσοδήποτε μικρό κύκλο και αν σχεδιάσουμε γύρω από το  $y$ , αυτός θα έχει ένα μέρος του στο  $X$  και ένα στο  $\mathbb{R}^2 \setminus X$

**Θεώρημα 10.1 (Jordan, 1887)** Μια απλή, κλειστή καμπύλη  $C$ , διαμερίζει το επίπεδο σε ακριβώς δύο περιοχές, όπου η κάθε μια έχει σαν σύνορο τη  $C$ .



Σχήμα 10.2: Οι περιοχές 1 και 2, έχουν σαν σύνορό τους την καμπύλη  $C$



Σχήμα 10.3: Όπως φαίνεται στο σχήμα, σε ένα τοροειδές, το θεώρημα του *Jordan* δεν ισχύει

Παράδειγμα μιας τέτοιας καμπύλης δίνεται στο Σχήμα 10.2.

**Παρατήρηση 10.1** Το θεώρημα *Jordan* δεν ισχύει για κάθε επιφάνεια.

**Ορισμός 10.6** Εμβάπτιση (ή σχεδιασμός) ενός γραφήματος  $G = (V, E)$  στο επίπεδο, είναι μια συνάρτηση  $f : V \cup E \rightarrow \mathbb{R}^2$  που απεικονίζει:

1. κάθε  $u \in V$  σε σημείο  $f(u)$
2. κάθε ακμή  $\{u, v\} \in E$  σε μια απλή καμπύλη  $f(\{u, v\})$  με άκρα  $f(u)$  και  $f(v)$
3. για κάθε  $u, v \in V$  ισχύει ότι  $f(u) \neq f(v)$  και για κάθε  $\{u, v\} \in E$  ισχύει ότι  $f(\{u, v\}) \cap f(V) = \{f(u), f(v)\}$

**Ορισμός 10.7** Για  $e, e' \in E, e \neq e'$ , ένα σημείο στην τομή  $f(e) \cap f(e')$  που δεν είναι κοινό άκρο των  $f(e)$  και  $f(e')$  καλείται διασταύρωση (crossing).

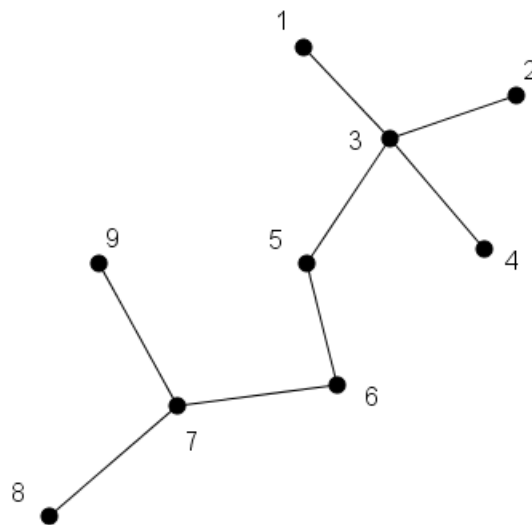
## 10.2 Επίπεδα γραφήματα

**Ορισμός 10.8** Ένα γράφημα  $G$  καλείται επίπεδο (planar) αν υπάρχει εμβάπτιση του  $G$  στο  $\mathbb{R}^2$  χωρίς διασταυρώσεις.

**Ορισμός 10.9** Ένα γράφημα εμβαπτισμένο στο επίπεδο καλείται ενεπίπεδο (plane).

**Ορισμός 10.10** Όψεις (faces) ενός ενεπίπεδου γραφήματος  $G$  είναι οι μεγιστικές περιοχές του  $\mathbb{R}^2$  που δεν περιέχουν κανένα σημείο που χρησιμοποιείται στην εμβάπτιση, δηλαδή μεγιστικές περιοχές του  $\mathbb{R}^2 \setminus G$ .

**Παρατήρηση 10.2** Οι όψεις είναι ανοιχτά σύνολα.

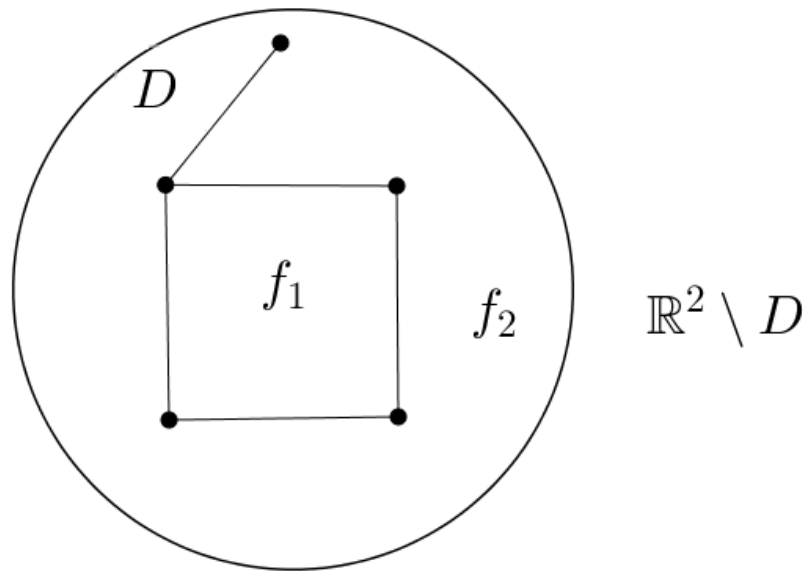


Σχήμα 10.4: Ένα δέντρο έχει ακριβώς μια όψη.

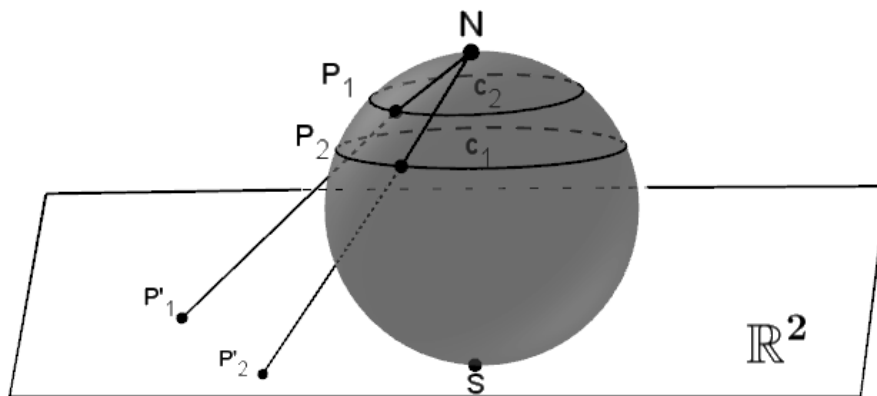
Για κάθε ενεπίπεδο γράφημα  $G$ , υπάρχει κλειστός δίσκος  $D$  που το περιέχει. Η όψη του  $G$  που περιέχει το  $\mathbb{R}^2 \setminus D$  καλείται εξωτερική.

**Θεώρημα 10.2** Αν ένα συνεκτικό γράφημα  $G$ , έχει μια εμβάπτιση στο επίπεδο στην οποία κάποια όψη έχει ως σύνορο τον κύκλο  $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ , τότε υπάρχει εμβάπτιση του  $G$  στο επίπεδο στην οποία η εξωτερική όψη έχει σύνορο τον κύκλο  $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ .

**Απόδειξη:** Έστω  $f$  η όψη που εξετάζουμε. Μεταφέρουμε την εμβάπτιση από το επίπεδο στην σφαίρα (τυπικά αυτό που κάνουμε είναι το αντίστροφο της στερεογραφικής προβολής.) Κάνουμε ολίσθηση της εμβάπτισης πάνω στην σφαίρα  $S$ , έτσι ώστε ο βόρειος πόλος  $N$  να βρεθεί μέσα στην  $f$ . Για να προβάλλουμε από την  $S$  στο  $\mathbb{R}^2$  τοποθετούμε την  $S$  έτσι ώστε ο νότιος πόλος να εφάπτεται του  $\mathbb{R}^2$ . Για κάθε σημείο  $P$  της  $S$  με  $P \neq N$ , η στερεογραφική προβολή του  $P$  στο  $\mathbb{R}^2$  είναι η τομή της ευθείας που διέρχεται από τα  $N, P$  με το  $\mathbb{R}^2$ .



Σχήμα 10.5: Η όψη  $f_2$  περιέχει την  $\mathbb{R}^2 \setminus D$ , άρα είναι εξωτερική.



Σχήμα 10.6: Τρισδιάστατο σχήμα της διαδικασίας που ακολουθούμε.

Ο τύπος της στερεογραφικής προβολής είναι  $\varphi(x, y, z) = \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$  (με  $z = 1$  να είναι ο βόρειος πόλος) και της αντίστροφης στερεογραφικής προβολής είναι  $\varphi^{-1}(x, y) = \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right)$  ■