Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 11: 23.11.2016 — Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Παναγιώτης Ρεπούσκος

11.1 Βασικές Ιδιότητες

Θεώρημα 11.1 (Τύπος του Euler, 1752) *Αν ένα συνεκτικό ενεπίπεδο γράφημα έχει n κορυφές, m ακμές και f όψεις, τότε ισχύει πως $n - m + f = 2$.*

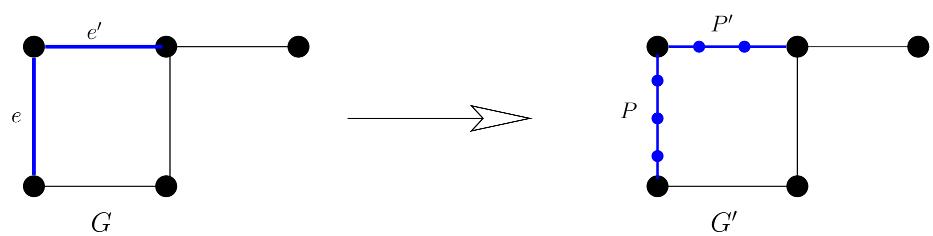
Θεώρημα 11.2 *Έστω ένα γράφημα G. Αν $|G| \geq 3$ και το G είναι επίπεδο, τότε $|E(G)| \leq 3|G| - 6$. Αν το G δεν περιέχει τρίγωνο, τότε $|E(G)| \leq 2|G| - 4$.*

Πόρισμα 11.1 *Τα γραφήματα K_5 και $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδα.*

Απόδειξη: Το K_5 έχει $\binom{5}{2} = 10$ ακμές. Από Θεώρημα 11.2, αφού $10 > 3 \cdot 5 - 6 = 9$, το K_5 δεν είναι επίπεδο. Όμοια, το $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο, αφού $|E(K_{3,3})| = 9 > 2 \cdot 6 - 4 = 8$.

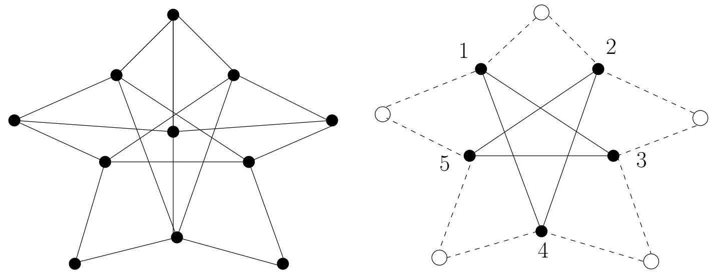
■

Ορισμός 11.1 Υποδιαίρεση *ενός γραφήματος $G = (V, E)$ είναι ένα γράφημα, που προκύπτει από το G αντικαθιστώντας ακμές με εσωτερικά διακεκριμένα μονοπάτια.*



Σχήμα 11.1: Αντικαθιστώντας τις ακμές e, e' με τα εσωτερικά διακεκριμένα μονοπάτια P, P', πήραμε την υποδιαίρεση G' του G.

Θεώρημα 11.3 (Kuratowski, 1930) *Ένα γράφημα είναι επίπεδο ανν δεν περιέχει ως υπογράφημα μία υποδιαίρεση του K_5 ή του $K_{3,3}$.*



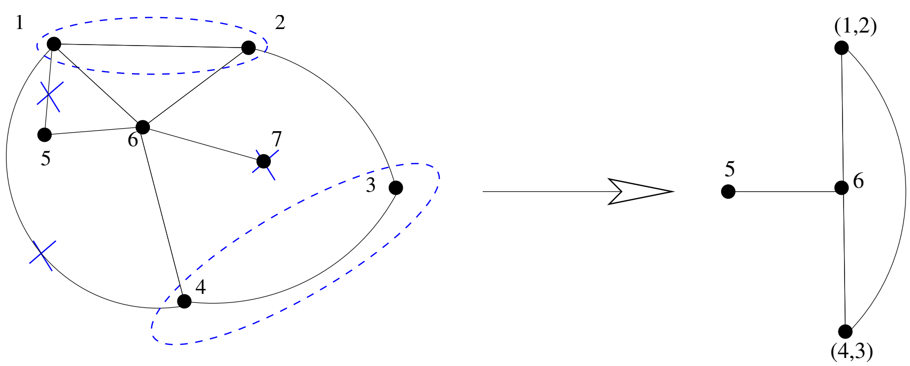
Σχήμα 11.2: Το γράφημα του Grötzsch (αριστερά). Δεν είναι επίπεδο και έχει ως υπογράφημα μία υποδιαίρεση του K_5 (δεξιά). Επίσης, $n = 11$, $m = 20$ και $m \leq 11 \cdot 3 - 6 = 27$. Η συνθήκη του Θεωρήματος 11.2 δεν είναι ικανή.

Ορισμός 11.2 Έλασσον *(minor) ενός γραφήματος $G = (V, E)$ είναι ένα γράφημα, που μπορεί να προκύψει από το G με μηδέν ή περισσότερες από τις ακόλουθες τρεις πράξεις:*

(α) διαγραφές κορυφών,

(β) διαγραφές ακμών,

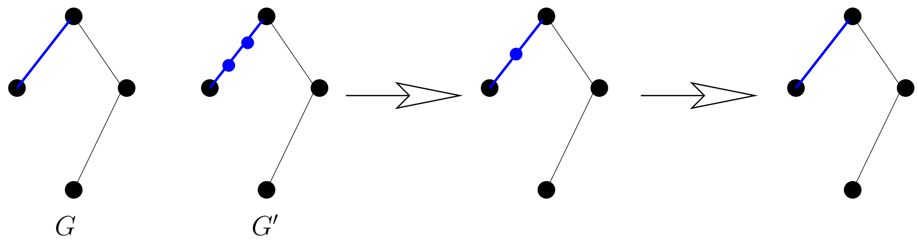
(γ) συνθλίψεις ακμών.



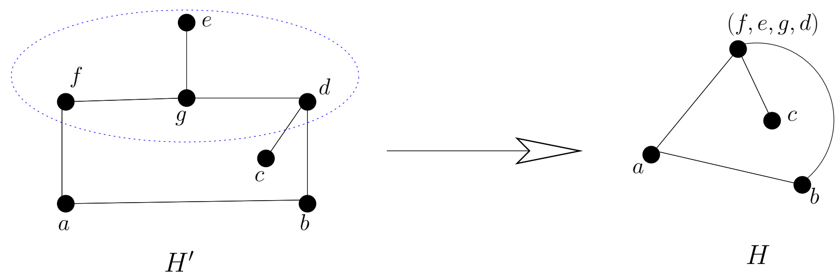
Σχήμα 11.3: Διαγράφοντας την κορυφή 7, τις ακμές $\{1, 5\}$, $\{1, 4\}$ και συνθλίβοντας τις $\{1, 2\}$, $\{4, 3\}$, προκύπτει ένα έλασσον του αρχικού γραφήματος.

Αν το H είναι έλασσον του G, τότε οι κορυφές του H αντιστοιχούν σε συνεκτικά υπογραφήματα του G.

Παρατήρηση 11.1 *Αν το G' είναι υποδιαίρεση του G, τότε το G είναι έλασσον του G'. Το αντίστροφο δεν ισχύει.*



Σχήμα 11.4: Το G' είναι υποδιαίρεση του G και το G προκύπτει από το G' με δύο συνθλίψεις ακμών.

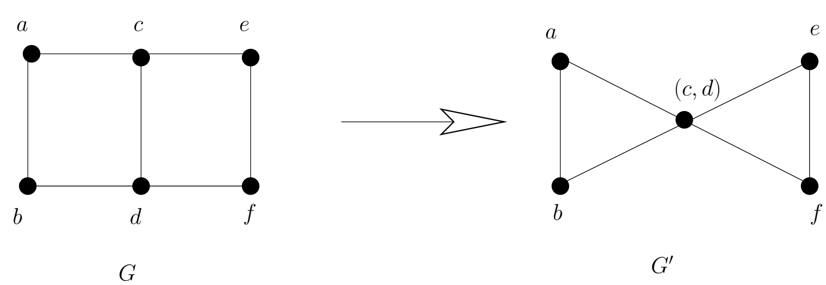


Σχήμα 11.5: Το H είναι έλασσον του H', όμως το H' δεν είναι υποδιαίρεση του H.

Θεώρημα 11.4 (Wagner, 1937) *Ένα γράφημα είναι επίπεδο ανν δεν περιέχει το K_5 ή το $K_{3,3}$ ως ελάσσονα.*

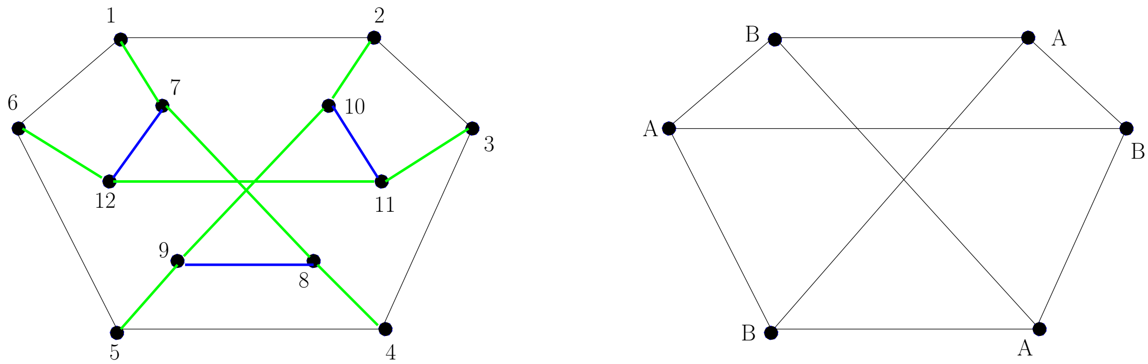
Πρόταση 11.1 *Η κλάση των επιπέδων γραφημάτων είναι κλειστή ως προς ελάσσονα (minor closed). Δηλαδή, κάθε έλασσον ενός επίπεδου γραφήματος είναι επίπεδο.*

Παράδειγμα 11.1 *Η κλάση των δισυνεκτικών γραφημάτων δεν είναι κλειστή ως προς ελάσσονα.*



Σχήμα 11.6: Το G' είναι έλασσον του δισυνεκτικού G, όμως έχει αρθρικό σημείο.

Θεώρημα 11.5 (Robertson - Seymour, 2004) *Κάθε κλάση γραφημάτων που είναι κλειστή ως προς ελάσσονα, μπορεί να περιγραφεί από ένα πεπερασμένο σύνολο απαγορευμένων ελασσόνων («σύνολο παρεμπόδισης»).*

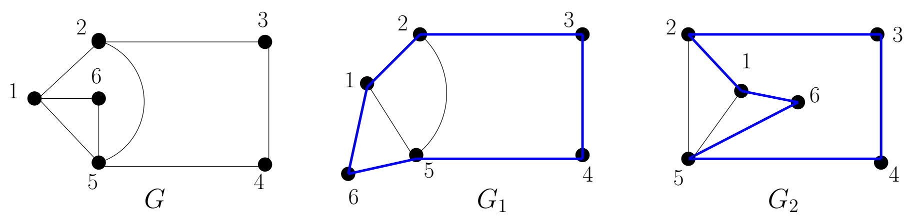


Σχήμα 11.7: Το γράφημα του Franklin (αριστερά). Είναι 3-κανονικό και hamiltonian. Σβήνοντας τις μπλε ακμές και συνθλίβοντας κατάλληλα τα πράσινα μονοπάτια, βλέπουμε πως το γράφημα περιέχει το $K_{3,3}$ ως έλασσον (δεξιά, όπου A, B οι δύο διαμερίσεις), οπότε δεν είναι επίπεδο. Επίσης παρατηρούμε πως $n = 12$, $m = 18$ και $m \leq 3 \cdot 12 - 6 = 30$.

Παράδειγμα 11.2 *Η κλάση των δασών, που είναι κλειστή ως προς ελάσσονα, έχει ως σύνολο παρεμπόδισης το K_3.*

$$\begin{array}{ll} \textit{το } G \textit{ δεν είναι δάσος} & \Leftrightarrow \\ \textit{το } G \textit{ περιέχει κύκλο} & \Leftrightarrow \\ \textit{το } G \textit{ περιέχει ως έλασσον το } K_3 & \end{array}$$

Ορισμός 11.3 *Ένα επίπεδο γράφημα G καλείται* εξωεπίπεδο *(outerplanar) αν μπορεί να εμβαπτιστεί στο επίπεδο, έτσι ώστε όλες οι κορυφές του να βρίσκονται στο σύνορο της ίδιας όψης.*



Σχήμα 11.8: Το εξωεπίπεδο γράφημα G και δύο εμβαπτίσεις του G_1, G_2, που έχουν όλες τις κορυφές στο (μπλε) σύνορο της ίδιας όψης.

Πρόταση 11.2 *Το σύνορο της όψης πάνω στην οποία βρίσκονται όλες οι κορυφές ενός 2-συνεκτικού εξωενεπίπεδου γραφήματος, είναι* **επικαλύπτων κύκλος** *(spanning cycle).*

Απόδειξη: Το σύνορο περιέχει όλες τις κορυφές. Αν δεν είναι κύκλος, τότε ο περίπατος που το διατρέχει, περνάει από κάποια κορυφή v πάνω από μία φορά. Η v δηλαδή είναι αρθρικό σημείο. Άτοπο, επειδή το γράφημα είναι 2-συνεκτικό.

∎

Πρόταση 11.3 *Το K_4 και το $K_{2,3}$ είναι επίπεδα, αλλά όχι εξωεπίπεδα.*

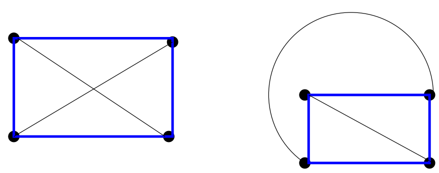
Απόδειξη:

K_4 $K_{2,3}$

Σχήμα 11.9: Εμβαπτίσεις του K_4 και του $K_{2,3}$ στο επίπεδο.

Παρατηρούμε ότι και τα δύο είναι 2-συνεκτικά.

Μία εξωεπίπεδη εμβάπτιση προϋποθέτει επικαλύπτοντα κύκλο. Αυτό θα σήμαινε πως στο $K_{2,3}$ περιέχεται ο C_5, το οποίο είναι αδύνατο, αφού το $K_{2,3}$ είναι διμερές.



α β

Στο K_4 υπάρχει επικαλύπτων κύκλος. Όμως τα άκρα των άλλων δύο ακμών εναλλάσσονται στον κύκλο. Δεν μπορούν να είναι και οι 2 ακμές μέσα (σχήμα α). Αν σχεδιάσουμε τη μία μέσα και την άλλη έξω, απομονώνουμε μία κορυφή από την όψη που θα θέλαμε να ορίζει την εξωεπιπεδότητα (σχήμα β).

∎