

## 12.1 Εξωεπίπεδα γραφήματα (συνέχεια)

**Ορισμός 12.1** Έστω γράφημα  $G = (V, E)$  και  $S \subseteq V$ .  $S$ -λοβός ( $S$ -lobe) είναι το γράφημα που ενάγεται από το  $S$  και μια από τις συνεκτικές συνιστώσες του  $G \setminus S$ .

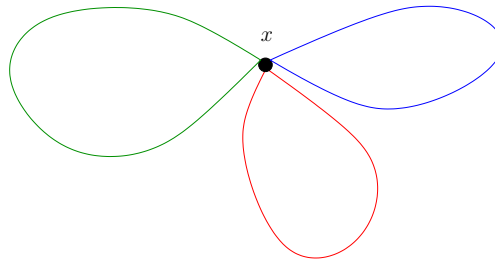
**Θεώρημα 12.1** Κάθε εξωεπίπεδο γράφημα  $G$ , με  $|G| \geq 2$ , έχει δυο κορυφές με βαθμό το πολύ 2. Αν  $|G| \geq 4$ , αυτές είναι μη γειτονικές.

**Απόδειξη:** Αρκεί να αποδείξουμε την πρόταση για συνεκτικά γραφήματα. Αν  $|G| \leq 3$  όλες οι κορυφές έχουν το πολύ βαθμό 2.

**Βάση:**  $|G| = 4$ . Αφού το  $K_4$  δεν είναι εξωεπίπεδο, ο  $G$  περιέχει 2 μη γειτονικές κορυφές κι αυτές έχουν βαθμό το πολύ 2.

**Επαγωγικό βήμα:**  $|G| > 4$ .

Περίπτωση 1: Το  $G$  έχει αρθρικό σημείο  $x$ . Βλ. Σχήμα 12.1.



Σχήμα 12.1: Γράφημα  $G$  με τρεις  $\{x\}$ -λοβούς.

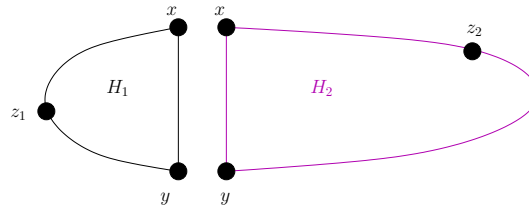
Από την Ε. Υ. κάθε ένας από τους τουλάχιστον δύο  $\{x\}$ -λοβούς που ορίζονται έχει κάποια κορυφή βαθμού  $\leq 2$  που δεν είναι ο  $x$ .

Περίπτωση 2: Το  $G$  είναι 2-συνεκτικό γράφημα. Από γνωστή πρόταση υπάρχει εμφάπτιση του  $G$  στο επίπεδο όπου όλες οι κορυφές βρίσκονται σε κύκλο  $C$ . Αν ο  $C$  δεν έχει χορδές (χορδή του  $C$  είναι ακμή που δεν ανήκει στον κύκλο ενώ τα άκρα της ανήκουν στο  $V(C)$ ) το  $G$  είναι μόνο ο κύκλος άρα 2-κανονικό. Αν  $\{x, y\}$ , χορδή του  $C$ , τα σύνολα των κορυφών των δύο  $x$ - $y$  μονοπατιών στον  $C$  ενάγουν 2 εξωεπίπεδα υπογραφήματα  $H_1$  και  $H_2$ . Βλ. Σχήμα 12.2. Παρατηρήστε ότι  $|H_1|, |H_2| \geq 3$ .

Αποκλείεται  $|H_1| = |H_2| = 3$  γιατί τότε  $|G| = 4$ . Από την Ε. Υ. τα  $H_1$  και  $H_2$  περιέχουν αντίστοιχα κορυφές  $z_1$  και  $z_2$  τ. ώ.  $d_{H_1}(z_1), d_{H_2}(z_2) \leq 2$ . Ισχυριζόμαστε ότι μπορούμε πάντα να επιλέξουμε

$z_1, z_2 \notin \{x, y\}$ . Αν  $|H_1|, |H_2| \geq 4$ , ισχύει. Αν όχι, υποθέτουμε χβτγ  $|H_1| = 3$ . Τότε το  $H_1$  είναι τρίγωνο και περιέχει κορυφή  $z_1 \notin \{x, y\}$  τ. ώ.  $d_{H_1}(z_1) = 2$ .

Λόγω εξωεπιπεδότητας καμία χορδή του  $C$  δεν μπορεί να σχεδιαστεί έξω από τον δίσκο που περιέχει την εμβάπτιση  $e$  της χορδής  $\{x, y\}$ . Επίσης καμία τέτοια χορδή δεν επιτρέπεται να τμήσει την  $e$ . Επομένως  $d_G(z_1), d_G(z_2) \leq 2$  και επίσης οι δύο κορυφές δεν είναι γειτονικές στο  $G$ . ■



Σχήμα 12.2: Γραφήματα  $H_1$  και  $H_2$ .

**Πόρισμα 12.1** Σε κάθε εξωεπίπεδο γράφημα  $G$  με  $n \geq 2$  ισχύει ότι  $m \leq 2n - 3$ .

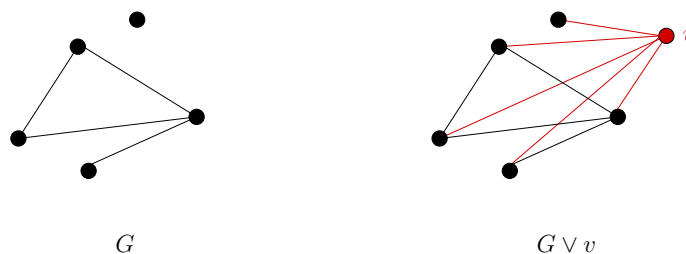
**Απόδειξη:** Με επαγωγή στο  $n$ .

**Βάση:**  $n = 2$ . Προφανές.

**Επαγωγικό βήμα:** Θα δείξουμε για  $k > 2$ . Από το Θεώρημα 12.1 το  $G$  περιέχει κορυφή  $u$  βαθμού το πολύ 2. Το  $G - u$  είναι εξωεπίπεδο τάξης  $k - 1$ . Από Ε.Υ.  $|E(G - u)| \leq 2(k - 1) - 3$  άρα  $|E(G)| \leq 2(k - 1) - 3 + 2 = 2k - 3$ . ■

Η κλάση των εξωεπίπεδων γραφημάτων είναι κλειστή ως προς ελάσσονα. Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε το σύνολο παρεμπόδισης (obstruction set) της κλάσης.

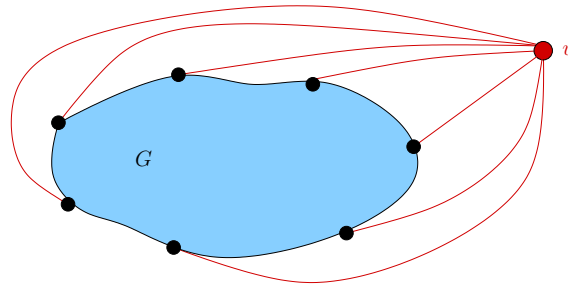
**Ορισμός 12.2** Έστω γράφημα  $G$  και  $v \notin V(G)$ . Ορίζουμε το γράφημα  $G \vee v$  ως  $G \vee v = (V, E)$  όπου  $V = V(G) \cup \{v\}$  και  $E = E(G) \cup \{\{u, v\} \mid u \in V(G)\}$ .



Σχήμα 12.3: Παράδειγμα για τον Ορισμό 12.2.

**Λήμμα 12.1** Ένα γράφημα  $G$  είναι εξωεπίπεδο ανν το  $G \vee v$  είναι επίπεδο.

**Απόδειξη:**  $\Rightarrow$ : Έστω  $G$  εξωεπίπεδο και εμβάπτιση του τέτοια ώστε όλες οι κορυφές να βρίσκονται στο σύνορο της εξωτερικής όψης  $f$ . Εμβάπτισε τη  $v$  στην  $f$  και συμπλήρωσε με τον προφανή τρόπο την εμβάπτιση του  $G \vee v$ . Βλ. Σχήμα 12.4.



Σχήμα 12.4: Εμβάπτιση του  $G \vee v$  ώστε η  $v$  να βρίσκεται στην εξωτερική όψη του  $G$ .

⇐: αν  $G \vee v$  ενεπίπεδο υπάρχει δίσκος  $D$  ο οποίος περιέχει το  $v$  τις ακμές που προσπίπτουν στο  $v$  και τους γείτονες του  $v$  χωρίς να τέμνει οποιαδήποτε άλλη ακμή του  $G \vee v$ . Αν διαγράψουμε την κορυφή  $v$  και τις ακμές που προσπίπτουν σε αυτή, όλες οι κορυφές του  $G$  θα βρεθούν στο σύνορο της ίδιας όψης  $f$ , η οποία ορίζεται ως η μοναδική όψη του  $G$  που περιέχει το  $\text{int } D$ . Θυμίζουμε ότι οι ακμές είναι ανοιχτά σύνολα και ότι το  $\text{int } D$  είναι το υποσύνολο του  $D$  που αποτελείται από όλα τα σημεία που δεν ανήκουν στο σύνορο του  $D$ . ■

**Θεώρημα 12.2** Ένα γράφημα  $G$  είναι εξωεπίπεδο αν το  $G$  δεν περιέχει το  $K_4$  ή το  $K_{2,3}$  ως ελάσσονα.

**Απόδειξη:** ⇒: Έστω ότι υπάρχει εξωεπίπεδο  $G$  που περιέχει ως ελάσσον  $H$  το  $K_4$  ή το  $K_{2,3}$ . Από το Λήμμα 12.1, για  $v \notin V(G)$  το  $G \vee v$  επίπεδο. Άρα το  $H \vee v$  είναι το  $K_5$  ή υπεργράφημα του  $K_{3,3}$ . Από το Θεώρημα Wagner το  $G \vee v$  δεν είναι επίπεδο, άτοπο.

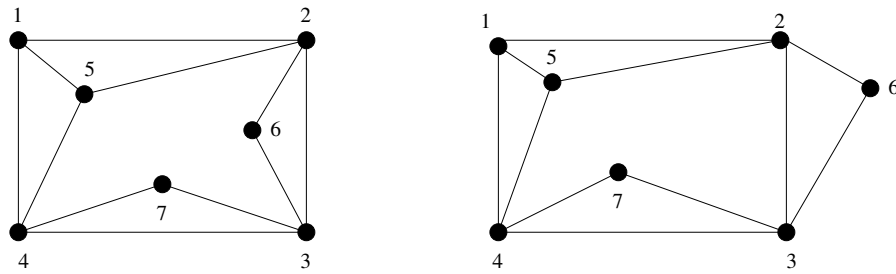
⇐: Έστω ότι το  $G$  δεν περιέχει ως ελάσσονα το  $K_4$  ή το  $K_{2,3}$ . Υποθέτουμε ότι το  $G$  δεν είναι εξωεπίπεδο. Από το Λήμμα 12.1, ορίζεται  $G \vee v$  που δεν είναι επίπεδο. Άρα το  $G \vee v$  περιέχει ως ελάσσον  $H$  το  $K_5$  ή το  $K_{3,3}$ . Αφαιρώντας την κορυφή  $v$  από το  $G \vee v$  καταστρέφουμε το πολύ μία κορυφή του  $H$ , άρα βρήκαμε το  $K_4$  ή το  $K_{2,3}$  ως ελάσσονα του  $G$ , άτοπο. ■

Μικρές τροποποιήσεις στην παραπάνω απόδειξη δίνουν ότι ένα γράφημα  $G$  είναι εξωεπίπεδο αν το  $G$  δεν περιέχει ως υπογράφημα υποδιαίρεση του  $K_4$  ή του  $K_{2,3}$ .

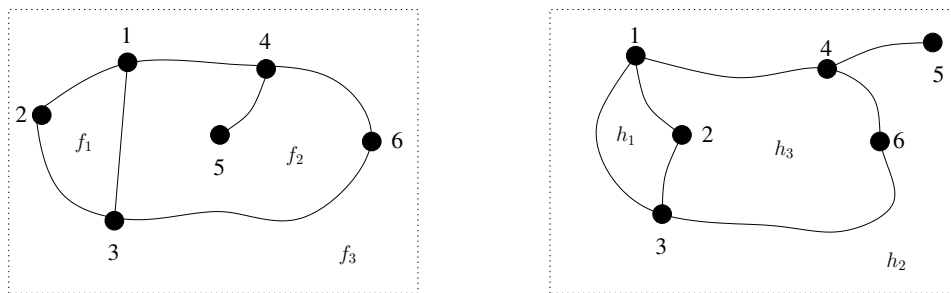
## 12.2 Ισοδύναμες εμβαπτίσεις

Για κάθε επίπεδο γράφημα υπάρχουν άπειρες εμβαπτίσεις. Το πλήθος  $f$  των όψεων είναι πάντα το ίδιο, αφού για ένα (συνεκτικό) επίπεδο γράφημα  $f = 2 - n + m$ . Από μια εμβάπτιση  $\Gamma_1$  προκύπτει μια διαφορετική εμβάπτιση  $\Gamma_2$  ακόμα κι αν π.χ., μετακινηθεί ελάχιστα (με ομοιομορφικό τρόπο) η εικόνα μιας ακμής στο επίπεδο. Διαισθητικά όμως οι  $\Gamma_1, \Gamma_2$  μας φαίνονται «παρόμοιες». Βλ. Σχήμα 12.5 για ένα παράδειγμα δύο εμβαπτίσεων του ίδιου γραφήματος που μοιάζουν αρκετά διαφορετικές. Θα θέλαμε να μπορούμε να διακρίνουμε τότε δύο εμβαπτίσεις μεταφέρουν την ίδια συνδυαστική πληροφορία. Εισάγουμε την έννοια της ισοδυναμίας εμβαπτίσεων.

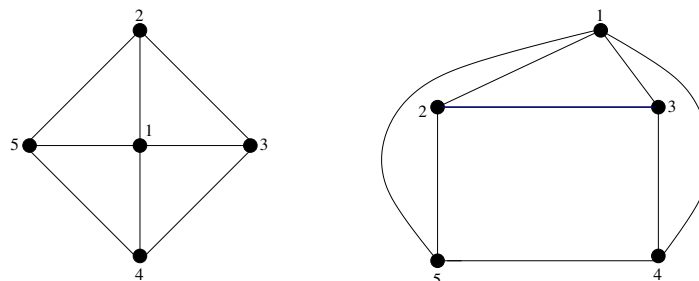
**Ορισμός 12.3** Δυο εμβαπτίσεις ενός γραφήματος  $G$  καλούνται ισοδύναμες αν οι ίδιες κυκλικές ακολουθίες κορυφών ορίζουν τα σύνορα των όψεων.



Σχήμα 12.5: Δύο διαφορετικές εμβάπτισεις του ίδιου γραφήματος. Στην αριστερή εμβάπτιση δεν υπάρχει καμία όψη με πέντε ακμές στο σύνορο της. Στη δεξιά υπάρχουν δύο τέτοιες όψεις.



Σχήμα 12.6: Δύο ισοδύναμες εμβάπτισεις του ίδιου γραφήματος. Οι όψεις  $f_1, f_2, f_3$  της αριστερής εμβάπτισης αντιστοιχούν στις όψεις  $h_1, h_2, h_3$  στη δεξιά.



Σχήμα 12.7: Δύο ισοδύναμες εμβάπτισεις του τροχού  $W_5$ . Απεικονίζοντας διαφορετική ακμή στο μπλε ευθύγραμμο τμήμα παίρνουμε τρεις ακόμα εμβάπτισεις οι οποίες είναι ισοδύναμες με αυτές του σχήματος.

Βλ. Σχήματα 12.6 και 12.7 για παραδείγματα ισοδύναμων εμβαπτίσεων. Με βάση τον παραπάνω ορισμό θα θεωρούμε ότι ένα γράφημα έχει κατ' ουσία «μοναδική» εμβάπτιση αν όλες οι εμβαπτίσεις του είναι ισοδύναμες. Στην επόμενη διάλεξη θα δώσουμε μια ικανή συνθήκη για το πότε μπορεί να συμβεί αυτό.