Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 12: 24.11.2016 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Τζαλάκας Ανδρέας & Σ.Κ.

12.1 Εξωεπίπεδα γραφήματα (συνέχεια)

Ορισμός 12.1 *Έστω γράφημα $G = (V, E)$ και $S \subseteq V$. S-λοβός (S-lobe) είναι το γράφημα που ενάγεται από το S και μια από τις συνεκτικές συνιστώσες του $G \backslash S$.*

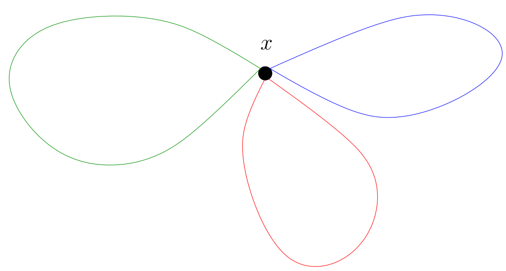
Θεώρημα 12.1 *Κάθε εξωεπίπεδο γράφημα G, με $|G| \geq 2$, έχει δυο κορυφές με βαθμό το πολύ 2. Αν $|G| \geq 4$, αυτές είναι μη γειτονικές.*

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε την πρόταση για συνεκτικά γραφήματα. Αν $|G| \leq 3$ όλες οι κορυφές έχουν το πολύ βαθμό 2.

Βάση: $|G| = 4$. Αφού το K_4 δεν είναι εξωεπίπεδο, ο G περιέχει 2 μη γειτονικές κορυφές κι αυτές έχουν βαθμό το πολύ 2.

Επαγωγικό βήμα: $|G| > 4$.

Περίπτωση 1: Το G έχει αρθρικό σημείο x. Βλ. Σχήμα 12.1.

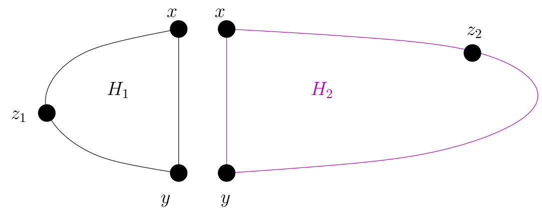


Σχήμα 12.1: Γράφημα G με τρεις $\{x\}$-λοβούς.

Από την Ε. Υ. κάθε ένας από τους τουλάχιστον δύο $\{x\}$-λοβούς που ορίζονται έχει κάποια κορυφή βαθμού ≤ 2 που δεν είναι ο x.

Περίπτωση 2: Το G είναι 2-συνεκτικό γράφημα. Από γνωστή πρόταση υπάρχει εμβάπτιση του G στο επίπεδο όπου όλες οι κορυφές βρίσκονται σε κύκλο C. Αν ο C δεν έχει χορδές (χορδή του C είναι ακμή που δεν ανήκει στον κύκλο ενώ τα άκρα της ανήκουν στο $V(C)$) το G είναι μόνο ο κύκλος άρα 2-κανονικό. Αν $\{x, y\}$, χορδή του C, τα σύνολα των κορυφών των δύο x-y μονοπατιών στον C ενάγουν 2 εξωεπίπεδα υπογραφήματα H_1 και H_2. Βλ. Σχήμα 12.2. Παρατηρήστε ότι $|H_1|, |H_2| \geq 3.$,

Από την Ε. Υ. τα H_1 και H_2, περιέχουν κορυφές z_1 και z_2 βαθμού το πολύ 2. Επαληθεύστε ότι $z_1, z_2 \notin \{x, y\}$. Λόγω εξωεπιπεδότητας καμία χορδή του C δεν μπορεί να σχεδιαστεί έξω από το δίσκο



Σχήμα 12.2: Γραφήματα H_1 και H_2.

που περιέχει την εμβάπτιση e της χορδής $\{x, y\}$. Επίσης καμία τέτοια χορδή δεν επιτρέπεται να τμήσει την e. Επομένως $d_G(z_1), d_G(z_2) \leq 2$ και επίσης οι δύο κορυφές δεν είναι γειτονικές στο G. ∎

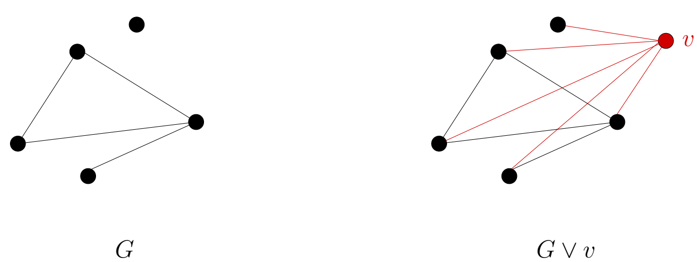
Πόρισμα 12.1 *Σε κάθε εξωεπίπεδο γράφημα G με $n \geq 2$ ισχύει ότι $m \leq 2n - 3$.*

Απόδειξη: Με επαγωγή στο n.
Βάση: $n = 2$. Προφανές.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε για $k > 2$. Από το Θεώρημα 12.1 το G περιέχει κορυφή u βαθμού το πολύ 2. Το $G - u$ είναι εξωεπίπεδο τάξης $k - 1$. Από Ε.Υ. $|E(G - u)| \leq 2(k - 1) - 3$ άρα $|E(G)| \leq 2(k - 1) - 3 + 2 = 2k - 3$. ∎

Η κλάση των εξωεπίπεδων γραφημάτων είναι κλειστή ως προς ελάσσονα. Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε το σύνολο παρεμπόδισης (obstruction set) της κλάσης.

Ορισμός 12.2 *Έστω γράφημα G και $v \notin V(G)$. Ορίζουμε το γράφημα $G \vee v$ ως $G \vee v = (V, E)$ όπου $V = V(G) \cup \{v\}$ και $E = E(G) \cup \{\{u, v\} \mid u \in V(G)\}$.*

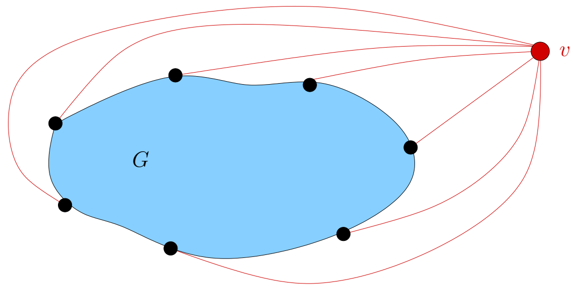


Σχήμα 12.3: Παράδειγμα για τον Ορισμό 12.2.

Λήμμα 12.1 *Ένα γράφημα G είναι εξωεπίπεδο ανν το $G \vee v$ είναι επίπεδο.*

Απόδειξη: $\Rightarrow$: Έστω G εξωεπίπεδο και εμβάπτιση του τέτοια ώστε όλες οι κορυφές να βρίσκονται στο σύνορο της εξωτερικής όψης f. Εμβάπτισε τη v στην f και συμπλήρωσε με τον προφανή τρόπο την εμβάπτιση του $G \vee v$. Βλ. Σχήμα 12.4.

$\Leftarrow$: αν $G \vee v$ ενεπίπεδο υπάρχει δίσκος D ο οποίος περιέχει το v τις ακμές που προσπίπτουν στο v και τους γείτονες του v χωρίς να τέμνει οποιαδήποτε άλλη ακμή του $G \vee v$. Αν διαγράψουμε την κορυφή



Σχήμα 12.4: Εμβάπτιση του $G \vee v$ ώστε η v να βρίσκεται στην εξωτερική όψη του G.

v και τις ακμές που προσπίπτουν σε αυτή, όλες οι κορυφές του G θα βρεθούν στο σύνορο της ίδιας όψης f, η οποία ορίζεται ως η μοναδική όψη του G που περιέχει το $\operatorname{int} D$. Θυμίζουμε ότι οι ακμές είναι ανοιχτά σύνολα και ότι το $\operatorname{int} D$ είναι το υποσύνολο του D που αποτελείται από όλα τα σημεία που δεν ανήκουν στο σύνορο του D. ∎

Θεώρημα 12.2 *Ένα γράφημα G είναι εξωεπίπεδο ανν το G δεν περιέχει το K_4 ή το $K_{2,3}$ ως ελάσσονα.*

Απόδειξη: $\Rightarrow$: Έστω ότι υπάρχει εξωεπίπεδο G που περιέχει ως έλασσον H το K_4 ή το $K_{2,3}$. Από το Λήμμα 12.1, για $v \notin V(G)$ το $G \vee v$ επίπεδο. Άρα το $H \vee v$ είναι το K_5 ή υπεργράφημα του $K_{3,3}$. Από το Θεώρημα Wagner το $G \vee v$ δεν είναι επίπεδο, άτοπο.

$\Leftarrow$: Έστω ότι το G δεν περιέχει ως ελάσσονα το K_4 ή το $K_{2,3}$. Υποθέτουμε ότι το G δεν είναι εξωεπίπεδο. Από το Λήμμα 12.1, ορίζεται $G \vee v$ που δεν είναι επίπεδο. Άρα το $G \vee v$ περιέχει ως έλασσον H το K_5 ή το $K_{3,3}$. Αφαιρώντας την κορυφή v από το $G \vee v$ καταστρέφουμε το πολύ μία κορυφή του H, άρα βρήκαμε το K_4 ή το $K_{2,3}$ ως ελάσσονα του G, άτοπο. ∎

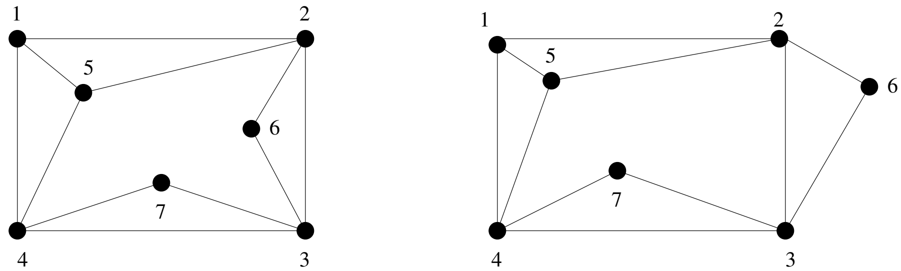
Μικρές τροποποιήσεις στην παραπάνω απόδειξη δίνουν ότι ένα γράφημα G είναι εξωεπίπεδο ανν το G δεν περιέχει ως υπογράφημα υποδιαίρεση του K_4 ή του $K_{2,3}$.

12.2 Ισοδύναμες εμβαπτίσεις

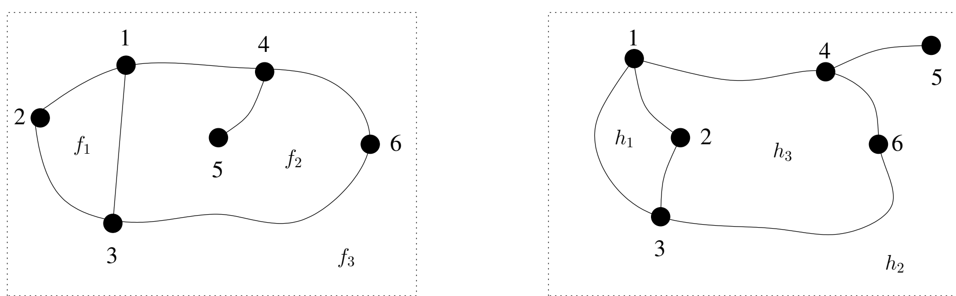
Για κάθε επίπεδο γράφημα υπάρχουν άπειρες εμβαπτίσεις. Το πλήθος f των όψεων είναι πάντα το ίδιο, αφού για ένα (συνεκτικό) επίπεδο γράφημα $f = 2 - n + m$. Από μια εμβάπτιση Γ_1 προκύπτει μια διαφορετική εμβάπτιση Γ_2 ακόμα κι αν π.χ., μετακινηθεί ελάχιστα (με ομοιομορφικό τρόπο) η εικόνα μιας ακμής στο επίπεδο. Διαισθητικά όμως οι Γ_1, Γ_2 μας φαίνονται «παρόμοιες». Βλ. Σχήμα 12.5 για ένα παράδειγμα δύο εμβαπτίσεων του ίδιου γραφήματος που μοιάζουν αρκετά διαφορετικές. Θα θέλαμε να μπορούμε να διακρίνουμε πότε δύο εμβαπτίσεις μεταφέρουν την ίδια συνδυαστική πληροφορία. Εισάγουμε την έννοια της ισοδυναμίας εμβαπτίσεων.

Ορισμός 12.3 *Δυο εμβαπτίσεις ενός γραφήματος G καλούνται* ισοδύναμες *αν οι ίδιες κυκλικές ακολουθίες κορυφών ορίζουν τα σύνορα των όψεων.*

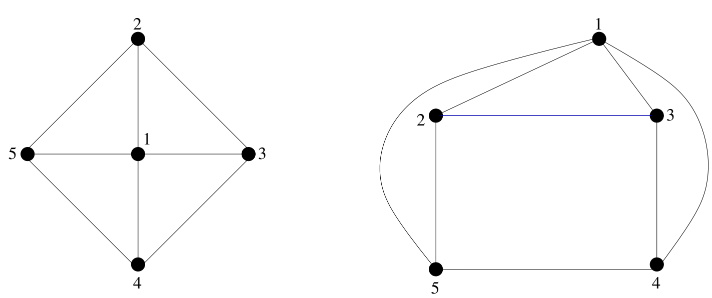
Βλ. Σχήματα 12.6 και 12.7 για παραδείγματα ισοδύναμων εμβαπτίσεων. Με βάση τον παραπάνω ορισμό θα θεωρούμε ότι ένα γράφημα έχει κατ᾽ ουσία «μοναδική» εμβάπτιση αν όλες οι εμβαπτίσεις του είναι



Σχήμα 12.5: Δύο διαφορετικές εμβαπτίσεις του ίδιου γραφήματος. Στην αριστερή εμβάπτιση δεν υπάρχει καμία όψη με πέντε ακμές στο σύνορο της. Στη δεξιά υπάρχουν δύο τέτοιες όψεις.



Σχήμα 12.6: Δύο ισοδύναμες εμβαπτίσεις του ίδιου γραφήματος. Οι όψεις f_1, f_2, f_3 της αριστερής εμβάπτιστης αντιστοιχούν στις όψεις h_1, h_2, h_3 στη δεξιά.



Σχήμα 12.7: Δύο ισοδύναμες εμβαπτίσεις του τροχού W_5. Απεικονίζοντας διαφορετική ακμή στο μπλε ευθύγραμμο τμήμα παίρνουμε τρεις ακόμα εμβαπτίσεις οι οποίες είναι ισοδύναμες με αυτές του σχήματος.

ισοδύναμες. Στην επόμενη διάλεξη θα δώσουμε μια ικανή συνθήκη για το πότε μπορεί να συμβεί αυτό.