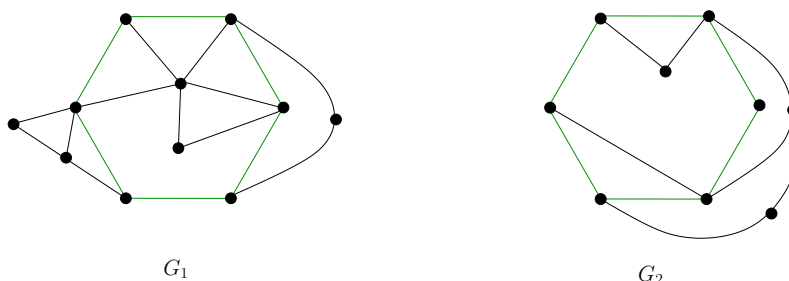


13.1 Εναγόμενοι κύκλοι

Ορισμός 13.1 Ένας κύκλος C του γραφήματος $G = (V, E)$, καλείται εναγόμενος αν $C = G[V(C)]$. Δηλαδή, εναγόμενος κύκλος C είναι κύκλος ο οποίος δεν έχει χορδές.

Βλ. Σχήμα 13.1 για ένα παράδειγμα εναγόμενου κύκλου.



Σχήμα 13.1: Ο G_1 περιέχει εναγόμενο κύκλο C_6 , ο G_2 περιέχει ένα υπογράφημα ισόμορφο με το C_6 που δεν είναι εναγόμενο υπογράφημα.

Λήμμα 13.1 Έστω κύκλος C σε επίπεδο γράφημα $G = (V, E)$ τ.ώ. $G \neq C$ και το γράφημα G δεν είναι ο κύκλος C συν μια χορδή. Τότε ο C ορίζει το σύνορο όψης σε κάθε εμβάπτιση του G στο επίπεδο, αν και μόνο αν ο C είναι εναγόμενος κύκλος και δεν είναι διαχωριστής του G .

Απόδειξη:

« \Leftarrow »:

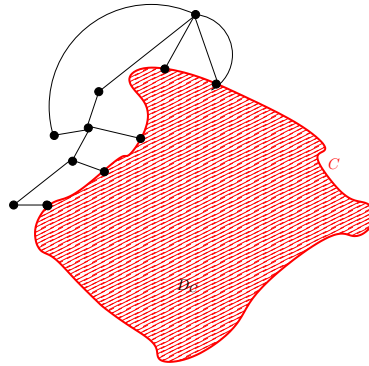
Έστω εμβάπτιση Γ του G στο επίπεδο. Αφού το $G \setminus C$ συνεκτικό, από το Θεώρημα του Jordan (Θεώρημα 10.1) θα περιέχεται εξολοκλήρου είτε στο εσωτερικό του δίσκου D_C που ορίζει ο C στη Γ (βλ. Σχήμα 13.2) είτε στο $\mathbb{R}^2 \setminus D_C$. Σε κάθε περίπτωση, η «άλλη» περιοχή του $\mathbb{R}^2 \setminus C$, δηλαδή αυτή που δεν περιέχει το $G \setminus C$, είναι μία όψη που έχει ως σύνορο το C , διότι δεν υπάρχουν χορδές (βλ. Σχήμα 13.3).

« \Rightarrow »: (χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της αντιθετοαντιστροφής)

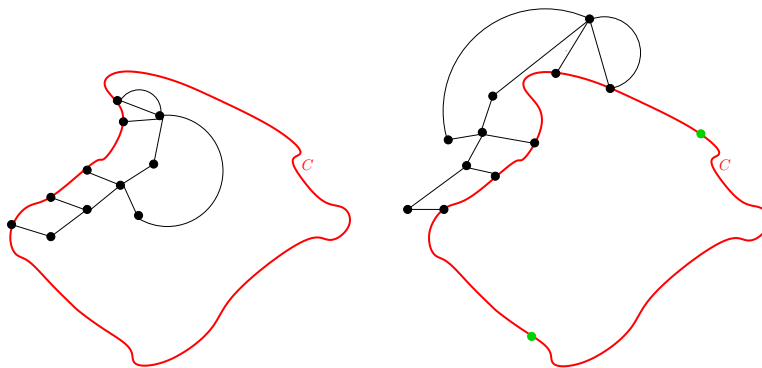
Έστω ο κύκλος C δεν είναι εναγόμενος ή το $G \setminus C$ δεν είναι συνεκτικό.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: Ο C δεν είναι εναγόμενος, δηλαδή υπάρχει χορδή c του C στο G . Αφού $G \neq C \cup c$, είτε ο G έχει κορυφή u εκτός του C ή το G περιέχει χορδή d του C όπου $d \neq c$.

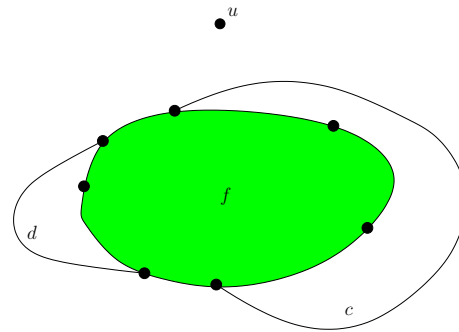


Σχήμα 13.2: Ενδεικτική αναπαράσταση δίσκου D_C που ορίζει ο C στην εμβάπτιση Γ .



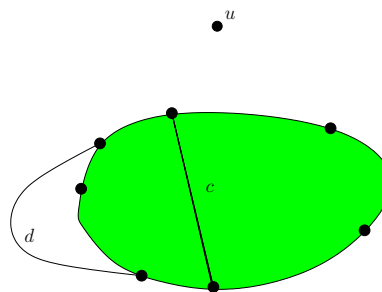
Σχήμα 13.3: Σχηματική επεξήγηση περιπτώσεων που απορρέουν από Θεώρημα του Jordan. Αριστερά: το $G \setminus C$ περιέχεται στο εσωτερικό του δίσκου D_C . Δεξιά: το $G \setminus C$ περιέχεται στο $\mathbb{R}^2 \setminus D_C$. Η μη ύπαρξη χορδών και στις δύο περιπτώσεις περιγράφεται σχηματικά. Στην αριστερή εικόνα η απουσία χορδών είναι προφανής, ενώ στη δεξιά, επισημαίνεται με την ύπαρξη των δύο πράσινων κόμβων.

Θεωρούμε εμβάπτιση Γ του γραφήματος G , στην οποία ο C ορίζει όψη f (βλ. Σχήμα 13.4). (Αν δεν υπάρχει τέτοια εμβάπτιση τότε αποδείχθηκε.)



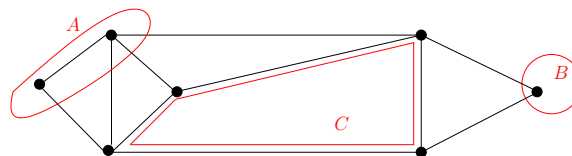
Σχήμα 13.4: Εμβάπτιση Γ στην οποία ο κύκλος C ορίζει όψη f .

Τροποποιούμε τη Γ σχεδιάζοντας τη c μέσα στην όψη f . Παίρνουμε εμβάπτιση Γ' στην οποία ο C δεν ορίζει όψη μιας και έξω από τον δίσκο που ορίζει ο C θα βρίσκεται η κορυφή u ή η χορδή d (βλ. Σχήμα 13.5).



Σχήμα 13.5: Εμβάπτιση Γ' στην οποία ο κύκλος C δεν ορίζει όψη.

Περίπτωση 2: Το $G \setminus C$ έχει τουλάχιστον δύο συνιστώσες. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι έχει ακριβώς δύο συνιστώσες A, B . Έστω η εμβάπτιση Γ στην οποία ορίζει όψη ο C . Από την A παίρνουμε τις «εναγόμενες» εμβαπτίσεις Γ_A του $G \setminus B = A \cup C$ και Γ_B του $G \setminus A = B \cup C$ (βλ. Σχήμα 13.6).



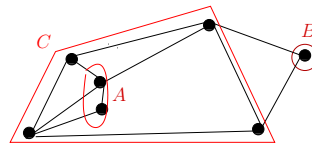
Σχήμα 13.6: Εμβάπτιση Γ στην οποία ορίζει όψη ο C .

Χ.β.τ.γ., υποθέτουμε επίσης ότι ο C ορίζει την εξωτερική όψη στη Γ_A και μη εξωτερική όψη στη Γ_B (βλ. Σχήμα 13.7). Συνδυάζουμε τις Γ_A και Γ_B «συγκολλώντας» τες στον C . Με άλλα λόγια

επεκτείνουμε την Γ_B σε εμβάπτιση όλου του G «προσθέτοντας» τη Γ_A στο εσωτερικό της όψης που ορίζει ο C (βλ. Σχήμα 13.8).



Σχήμα 13.7: Εμβαπτίσεις Γ_B (αριστερά στο σχήμα), Γ_A (δεξιά στο σχήμα).



Σχήμα 13.8: Συνδυασμός εμβαπτίσεων Γ_A και Γ_B σε μία εμβάπτιση.

Στις περιπτώσεις όπου $G = C$ ή $G = C \cup e$, όπου e χορδή του C , όλες οι εμβαπτίσεις περιέχουν όψη με σύνορο το C . Στη δεύτερη περίπτωση όπου οι κύκλοι του γραφήματος είναι ακριβώς τρεις, κάθε ένας από αυτούς ορίζει όψη σε οποιαδήποτε εμβάπτιση του G . Επομένως σε συνδυασμό με το Λήμμα 13.1 έχουμε χαρακτηρίσει επακριβώς πότε ένας κύκλος C ορίζει όψη σε κάθε εμβάπτιση του G .

Παρατήρηση 13.1 Αν $G = C$ ή $G = C \cup e$, όπου e είναι χορδή του κύκλου C , τότε το G δεν είναι 3-συνεκτικό.

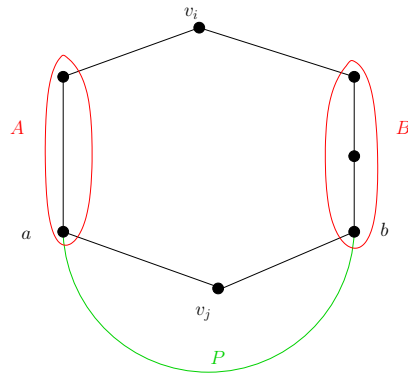
Πόρισμα 13.1 Ένας κύκλος C ενός επίπεδου 3-συνεκτικού γραφήματος G ορίζει όψη σε κάθε εμβάπτιση του G αν και μόνο αν ο C είναι εναγόμενος κύκλος και δεν είναι διαχωριστής.

13.2 Θεώρημα του Whitney

Θεώρημα 13.1 (Whitney, 1932) Όλες οι εμβαπτίσεις ενός επίπεδου 3-συνεκτικού γραφήματος είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη: Έστω G ένα επίπεδο 3-συνεκτικό γράφημα. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο εμβαπτίσεις Γ_1 και Γ_2 του G , οι οποίες δεν είναι ισοδύναμες. Τότε υπάρχει C , όπου C κύκλος $C = (v_1, \dots, v_k)$, $k \geq 3$, που ορίζει όψη στη Γ_1 αλλά όχι στη Γ_2 . Από το Πόρισμα 13.1, ο C ή έχει χορδή ή είναι διαχωριστής.

Περίπτωση 1: Ο C έχει χορδή $\{v_i, v_j\}$ με $j \geq i + 2$. Ορίζουμε επίσης: $A := \{v_x \mid i < x < j\}$ και $B := \{v_x \mid x > i \text{ ή } x > j\}$. Ισχύει ότι $A, B \neq \emptyset$ δεδομένου ότι v_i, v_j δεν είναι γειτονικά στο C .

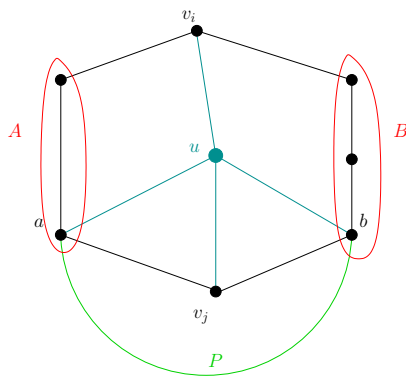


Σχήμα 13.9: Μονοπάτι P στην Περίπτωσης 1 της απόδειξης του Θεωρήματος 13.1.

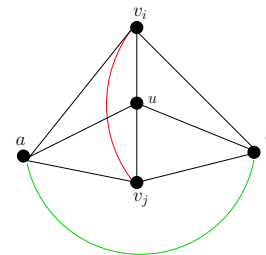
Αφού G είναι 3-συνεκτικό, υπάρχει τουλάχιστον ένα A - B μονοπάτι P που δεν χρησιμοποιεί τα v_i, v_j (βλ. Σχήμα 13.9).

Έστω a η τελευταία κορυφή του P που ανήκει στο A και b η πρώτη κορυφή του μονοπατιού που ανήκει στο B . Αφού το C ορίζει όψη f στη Γ_1 μπορούμε να προσθέσουμε κορυφή u μέσα στην όψη f και να την συνδέσουμε με τέσσερις διακεκριμένες (*disjoint*) καμπύλες με τις v_i, v_j, a, b (βλ. Σχήμα 13.10).

Βρήκαμε λοιπόν, ενεπίπεδο γράφημα $G' \supset G$ που περιέχει το K_5 ως έλασσον ή υποδιαίρεση (βλ. Σχήμα 13.11). Όμως το G' είναι επίπεδο. Οδηγηθήκαμε λοιπόν σε άτοπο.



Σχήμα 13.10: Η πρόσθετη κορυφή u μέσα στην όψη f και οι συνδέσεις της.

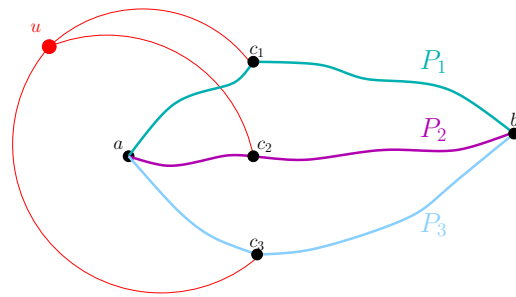


Σχήμα 13.11: Το K_5 ως έλασσον του G .

Περίπτωση 2: Ο C είναι διαχωριστής, άρα το $G \setminus C$ περιέχει δύο συνιστώσες A και B . Θεωρούμε εμβάπτιση $\overline{\Gamma_1}$ στην οποία ο C ορίζει όψη f . Χ.β.τ.γ. η f δεν είναι εξωτερική άρα και το A και το B είναι εμβαπτισμένα εξωτερικά της f .

Διαλέγουμε $a \in V(A)$ και $b \in V(B)$. Από το Θεώρημα του Menger «εκδοχή με κορυφές» (Θεώρημα 6.1) υπάρχουν τουλάχιστον 3 εσωτερικά διακεκριμένα μονοπάτια P_1, P_2, P_3 , από το a στο b .

Επίσης ορίζουμε τη c_i ως την πρώτη κορυφή του P_i στον κύκλο C , όπου $i = 1, 2, 3$. Βρήκαμε μια υποδιαίρεση του $K_{2,3}$ στο G . Έπειτα προσθέτουμε τη u στο εσωτερικό της όψης f και την ενώνουμε με τρεις διακεκριμένες καμπύλες με τα c_1, c_2, c_3 . Παρατηρούμε ότι πήραμε ενεπίπεδο γράφημα $G' \supset G$ που περιέχει υποδιαίρεση του $K_{3,3}$ (βλ. Σχήμα 13.12). Οδηγηθήκαμε σε άτοπο.



Σχήμα 13.12: Η υποδιαίρεση του $K_{3,3}$ που περιέχεται στο G .