Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 14: 30.11.2016 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Σ. Κ.

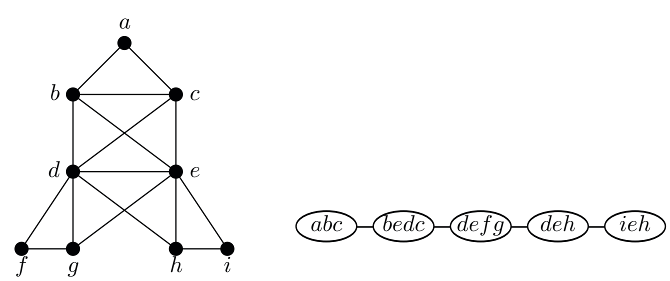
14.1 Πλάτος Μονοπατιού

Ορισμός 14.1 Αποσύνθεση μονοπατιού (path decomposition) *του γραφήματος G είναι μια ακολουθία $\mathcal{P} = (X_1, \ldots, X_r)$, $X_i \subseteq V(G)$, $1 \leq i \leq r$, τ. ώ.*

1. $\bigcup_{i=1}^{r} X_i = V(G)$.
2. $\forall \{u, v\} \in E(G)$, $\exists i$ τ. ώ. $u, v \in X_i$.
3. $\forall i < j < k$, $X_i \cap X_k \subseteq X_j$. *Δηλ. οι δείκτες των X_i που περιέχουν κάποιο $u \in V(G)$ αποτελούν συνεχόμενη υπακολουθία του $[r]$.*

Τα σύνολα X_i θα τα αποκαλούμε συνήθως τσάντες. Το *πλάτος* μιας αποσύνθεσης μονοπατιού $\mathcal{P}$ ορίζεται ως $\mathrm{width}(\mathcal{P}) = \max_{1 \leq i \leq r}\{|X_i| - 1\}$. Το *πλάτος μονοπατιού (pathwidth)* του γραφήματος G ορίζεται ως το ελάχιστο πλάτος μιας αποσύνθεσης μονοπατιού του G και συμβολίζεται $\mathrm{pw}(G)$. Διαισθητικά, γραφήματα με φραγμένο πλάτος μονοπατιού προσομοιάζουν δομικά με μονοπάτι. Βλ. Σχήμα 14.1 για ένα παράδειγμα αποσύνθεσης.

Τετριμμένα $\mathrm{pw}(G) \leq n - 1$. Εύκολα βλέπει κανείς ότι $\mathrm{pw}(P_n) = 1$. Για τον κύκλο C_n, $\mathrm{pw}(C_n) \leq 2$ αφού η παρακάτω είναι μια νόμιμη αποσύνθεση μονοπατιού: $\mathcal{P} = \{X_i = \{v_i, v_{i+1}, v_n\} \mid i \in [n-2]\}$, όπου $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι το σύνολο των κορυφών του κύκλου.



Σχήμα 14.1: Γράφημα G και μια αποσύνθεση μονοπατιού με πλάτος 3. Από το Λήμμα 14.3 παίρνουμε ότι $\mathrm{pw}(G) = 3$. Το σχήμα προέρχεται από το εγχειρίδιο Cygan, M., Fomin, F.V., Kowalik, L., Lokshtanov, D., Marx, D., Pilipczuk, M., Pilipczuk, M., Saurabh, S. *Parameterized Algorithms,* Springer, 2015.

14.2 Ιδιότητες πλάτους μονοπατιού

Ορισμός 14.2 *Έστω γράφημα G και $A \subseteq V(G)$. Το* σύνορο *του A ορίζεται ως $\partial A = \{v \in A \mid N(v) \cap (V(G) \setminus A) \neq \varnothing\}$.*

Λήμμα 14.1 *Έστω $(X_1, \ldots, X_r)$ μια αποσύνθεση μονοπατιού του γραφήματος G, $p, q \in [r]$, $p < q$ τ. ώ. $u \in X_p$, $v \in X_q$ και P ένα u-v μονοπάτι στο G. Τότε για κάθε $p \leq i \leq q$, $X_i \cap V(P) \neq \varnothing$.*

Απόδειξη: Έστω $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ όπου $u = v_0$ και $v = v_k$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει t, $p < t < q$, τ. ώ. $X_t \cap V(P) = \varnothing$. Έστω i μέγιστος δείκτης τ. ώ. $v_i \in X_1 \cup \ldots \cup X_{t-1}$. Αφού $v \notin X_t$ από την Ιδιότητα 3 του Ορισμού 14.1, $i < k$. Από την Ιδιότητα 2 του Ορισμού 14.1, κάποια τσάντα X_j πρέπει να περιέχει την ακμή $\{v_i, v_{i+1}\}$. Από τον ορισμό του i, παίρνουμε ότι $j > t$. Τότε από την Ιδιότητα 3 του Ορισμού το v_i πρέπει να ανήκει και στο X_t, άτοπο. ∎

Παρατήρηση 14.1 *Από το Λήμμα 14.1, συνάγουμε ότι* $\mathrm{pw}(C_n) \geq 2$ *(γιατί;). Άρα* $\mathrm{pw}(C_n) = 2$.

Όταν μελετούσαμε τη συνεκτικότητα είχαμε ορίσει την έννοια του διαχωριστή ενός γραφήματος. Κάθε διαχωριστής υπονοοεί ένα διαχωρισμό του γραφήματος σε δύο «κομμάτια». Εδώ ορίζουμε ρητά την έννοια του διαχωρισμού.

Ορισμός 14.3 Διαχωρισμός (separation) *του γραφήματος G καλείται ένα ζεύγος (A, B) όπου $A \cup B = V(G)$ και δεν υπάρχει ακμή από το $A \setminus B$ στο $B \setminus A$. Το σύνολο $A \cap B$ είναι ένας* διαχωριστής (separator) του (A, B) *και $|A \cap B|$ η τάξη του διαχωρισμού.*

Παρατήρηση 14.2 *Αν (A, B) είναι διαχωρισμός του G και $A \subseteq B$, το $G \setminus (A \cap B)$ δεν είναι απαραίτητα μη συνεκτικό.*

Παρατήρηση 14.3 *Για $A \subseteq V(G)$, $(A, (V(G) \setminus A) \cup \partial A)$ είναι διαχωρισμός του A με διαχωριστή το ∂A.*

Παρατήρηση 14.4 *Αν (A, B) είναι διαχωρισμός του γραφήματος G και $A, B \neq \varnothing$, $A \cap B = \varnothing$, τότε το G δεν μπορεί να είναι συνεκτικό.*

Ο Ορισμός 14.3 είναι συμβατός με τον πιο γενικό Ορισμό 4.4 της Διάλεξης 4. Αν (A, B) είναι διαχωρισμός του G, τότε το σύνολο $A \cap B$ είναι A-B διαχωριστής με βάση και τον Ορισμό 4.4.

Το λήμμα που ακολουθεί λέει ότι κάθε τσάντα X_i μιας αποσύνθεσης μονοπατιού διαχωρίζει τις κορυφές του $V(G)$ που βρίσκονται στις τσάντες πριν από την i από τις κορυφές που βρίσκονται στις τσάντες μετά την i.

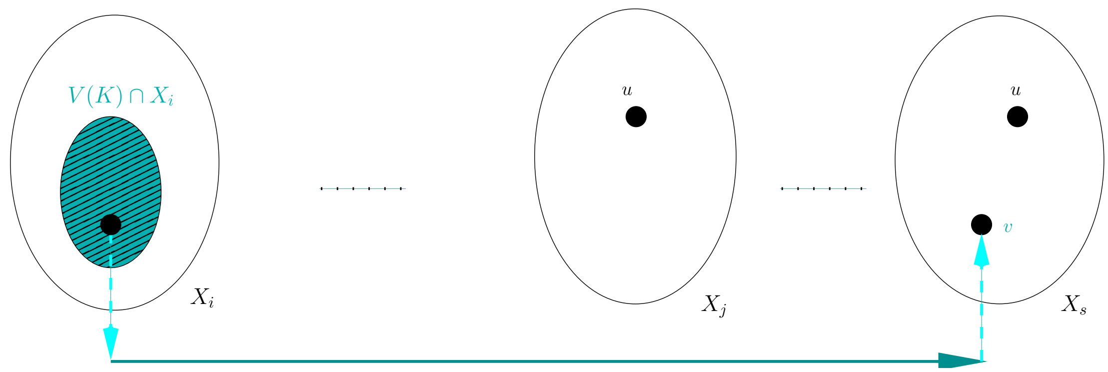
Λήμμα 14.2 *Έστω $(X_1, \ldots, X_r)$ μια αποσύνθεση μονοπατιού του γραφήματος G. Τότε για κάθε $j \in [r-1]$, $\partial(\cup_{i=1}^{j} X_i) \subseteq X_j \cap X_{j+1}$. Δηλαδή $(\cup_{i=1}^{j} X_i, \cup_{i=j+1}^{r} X_i)$ είναι ένας διαχωρισμός του G με διαχωριστή $X_j \cap X_{j+1}$.*

Απόδειξη: Συμβολίζουμε $(A, B) = (\cup_{i=1}^{j} X_i, \cup_{i=j+1}^{r} X_i)$.

Ισχυρισμός 14.1 $\partial(\cup_{i=1}^{j} X_i) = \partial A \subseteq X_j \cap X_{j+1}$.

Προς απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο του Ισχυρισμού 14.1, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $u \in \partial A$, τ. ώ. $u \notin X_j \cap X_{j+1}$. Άρα υπάρχει $\{u, v\} \in E(G)$, τ. ώ. $u \in A$, $v \notin A$ και $u \notin X_j \cap X_{j+1}$. Έστω i ο μεγαλύτερος δείκτης τ. ώ. $u \in X_i$ και k ο μικρότερος τ. ώ. $v \in X_k$. Αφού $u \in A$ και $u \notin X_j \cap X_{j+1}$, η Ιδιότητα 3 του Ορισμού 14.1 δίνει ότι $i \leq j$. Αφού $v \notin A$, $k \geq j+1$. Άρα $i < k$. Από την Ιδιότητα 2 πρέπει να υπάρχει τσάντα X_l που περιέχει και το u και το v. Με βάση τα προηγούμενα $l \leq i < k \leq l$, άτοπο. Άρα ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Απομένει να δείξουμε ότι $A \cap B = X_j \cap X_{j+1}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $A \cap B \subseteq X_j \cap X_{j+1}$. Τα A και B αντιστοιχούν σε δύο ακολουθίες τσαντών. Από την Ιδιότητα 3 του Ορισμού 14.1 μια κορυφή $v \in V(G)$ που ανήκει σε κάποια τσάντα και στις δύο ακολουθίες (δηλ. $v \in A \cap B$) πρέπει να εμφανίζεται σε ένα συνεχόμενο σύνολο $\mathcal{I}_v$ τσαντών της αποσύνθεσης. Κάθε τέτοιο $\mathcal{I}_v$ πρέπει να περιέχει τους δείκτες $j, j+1$, άρα $v \in X_j \cap X_{j+1}$. ∎



Σχήμα 14.2: Απεικόνιση της απόδειξης του Λήμματος 14.3.

Θυμίζουμε ότι με $\omega(G)$ συμβολίζουμε τον αριθμό κλίκας του G.

Λήμμα 14.3 *Για κάθε γράφημα G, $\mathrm{pw}(G) \geq \omega(G) - 1$.*

Απόδειξη: Έστω $(X_1, \ldots, X_r)$ μια αποσύνθεση μονοπατιού πλάτους μικρότερου από $\omega(G) - 1$. Άρα $|X_i| < \omega(G)$, για κάθε $i \in [r]$. Έστω K κλίκα μεγέθους $\omega(G)$, και X_i τ. ώ. $|V(K) \cap X_i|$ μέγιστο. Θεωρήστε $u \in V(K) \setminus X_i$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, για κάποιο $j > i$, $u \in X_j$. Διάλεξε j ελάχιστο, δηλ. $u \notin X_1 \cup \ldots \cup X_{j-1}$. Για όλα τα $v \in V(K) \cap X_i$ υπάρχει $s \in [r]$ τ. ώ. $\{v, u\} \subseteq X_s$. Βλ. Σχήμα 14.2 Τότε επειδή $s \geq j$, από την Ιδιότητα 3 του Ορισμού 14.1 $V(K) \cap X_i \subseteq X_j$. Αφού $u \in X_j \setminus X_i$, παίρνουμε ότι $|V(K) \cap X_j| > |V(K) \cap X_i|$ που αντιφάσκει με τον ορισμό του X_i. ∎

Παρατήρηση 14.5 *Η απόδειξη του λήμματος μας δείχνει κάτι ισχυρότερο: για κάθε κλίκα K που περιέχεται στο G, και για κάθε αποσύνθεση $\mathcal{P}$ του G, υπάρχει τσάντα όπου εμφανίζονται όλες οι κορυφές της κλίκας.*