| | | |
|---|---|---|
| | **Θεωρία Γραφημάτων** | |
| Διάλεξη 15: 01.12.2016 | | Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος |
| | Γραφέας: Σ. Κ. | |

## 15.1 Πλάτος Μονοπατιού στα δέντρα

Σε ένα δέντρο $T$ με $|V(T)| \geq 2$ ισχύει ότι $\omega(T) = 2$. Προκύπτει το τετριμμένο κάτω φράγμα $\mathrm{pw}(T) \geq 1$. Πόσο μεγάλο μπορεί να είναι το πλάτος μονοπατιού ενός δέντρου; Σε αυτή τη διάλεξη δίνουμε ένα άνω φράγμα στο Θεώρημα 15.3. Όπως θα δούμε στην επόμενη διάλεξη το άνω φράγμα είναι ασυμπτωτικά βέλτιστο στη χειρότερη περίπτωση.

Χρειαζόμαστε κάποια βοηθητικά λήμματα που αφορούν την ύπαρξη διαχωριστών σε δέντρα και δάση. Τις αποδείξεις του Θεωρήματος 15.2 και του Λήμματος 15.1. θα τις δώσουμε στην Ενότητα 15.2.

**Θεώρημα 15.1 (Camille Jordan, 1869)** *Κάθε δέντρο $T$ με $n$ κορυφές περιέχει μία κορυφή $v$ τ. ώ. στο $T - v$ όλες οι συνεκτικές συνιστώσες έχουν μέγεθος το πολύ $n/2$.*

**Απόδειξη:** Η απόδειξη είναι κατασκευαστική. Διάλεξε αυθαίρετα μία κορυφή $v \in V(T)$. Αν η $v$ δεν έχει την απαιτούμενη ιδιότητα, υπάρχει συνεκτική συνιστώσα $C$ του $T - v$ με περισσότερες από $n/2$ κορυφές. Περπάτησε ένα βήμα από τη $v$ κατά μήκος της ακμής $\{v, u\}$ του $T$ που συνδέει τη $C$ με το υπόλοιπο δέντρο. Επανέλαβε τη διαδικασία από την κορυφή $u$.

Αρκεί να δείξουμε ότι ο αλγόριθμος τερματίζει, δηλ. δεν επιστρέφει ποτέ στην ίδια κορυφή $v$. Από μία κορυφή $u$ ποτέ δεν επισκεπτόμαστε κορυφές που έχουμε ήδη επισκεφθεί γιατί η συνιστώσα του $T - u$ που τις περιέχει έχει λιγότερες από $n/2$ κορυφές. Αφού το δέντρο είναι πεπερασμένο ο αλγόριθμος τερματίζει σε μία κορυφή με την επιθυμητή ιδιότητα. ∎

Το προηγούμενο θεώρημα δεν φράσσει τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών. Π.χ., αφαιρώντας την κεντρική κορυφή από ένα αστεροειδές γράφημα προκύπτουν $n - 1$ συνεκτικές συνιστώσες. Το λήμμα που ακολουθεί δείχνει ότι μπορούμε να ομαδοποιήσουμε αυτές τις συνιστώσες σε το πολύ τρία *μέρη*. Τα σύνολα κορυφών που αντιστοιχούν σε κάθε μέρος δεν ενάγουν απαραίτητα συνεκτικό γράφημα.

**Λήμμα 15.1** *Για κάθε γράφημα $G$ και $X, S \subseteq V(G)$ τ. ώ. κάθε συνιστώσα του $G - X$ περιέχει το πολύ τις μισές κορυφές του $S \setminus X$, μπορούμε να διαμερίσουμε τις συνιστώσες του $G - X$ το πολύ σε τρία μέρη ώστε κάθε μέρος να περιέχει το πολύ τις μισές κορυφές του $S \setminus X$.*

Το λήμμα είναι πιο γενικό από ότι χρειαζόμαστε. Στις εφαρμογές μας θα ισχύει ότι $S = V(G)$.

Μπορούμε να μειώσουμε τα μέρη της διαμέρισης που μας εγγυάται το Λήμμα 15.1 από τρία σε δύο, αυξάνοντας το μέγεθος τους. Έστω $A, B, C$ τα σύνολα κορυφών που αντιστοιχούν στα τρία μέρη της διαμέρισης του $S \setminus X$ όπου $\max\{|A|, |B|, |C|\} \leq n/2$. Χβτγ, $|A| \leq n/3$. Αν $|A| + \min\{|B|, |C|\} \leq 2n/3$, τελειώσαμε. Αν όχι, τότε

$$\left.\begin{array}{l} |A| + |B| > 2n/3 \\ |A| + |C| > 2n/3 \end{array}\right\} \Rightarrow |A| > 4n/3 - (|C| + |B|) \Rightarrow |A| > 4n/3 - n = n/3, \text{ άτοπο.}$$

Αποδείξαμε την παρακάτω τροποποίηση του Λήμματος 15.1.

**Λήμμα 15.2** *Για κάθε γράφημα $G$ και $X, S \subseteq V(G)$ τ. ώ. κάθε συνιστώσα του $G - X$ περιέχει το πολύ τις μισές κορυφές του $S \setminus X$, μπορούμε να διαμερίσουμε τις συνιστώσες του $G - X$ σε το πολύ δύο μέρη ώστε κάθε μέρος να περιέχει το πολύ τα 2/3 των κορυφών του $S \setminus X$.*

Ο αναδρομικός αλγόριθμος που θα χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε αποσύνθεση μονοπατιού ενός δέντρου από το πρώτο βήμα σπάει το δέντρο σε δάσος, άρα χρειαζόμαστε εργαλεία που να αφορούν διαχωρισμό ενός δάσους. Έχοντας τα διαθέσιμα, θα αποδείξουμε κατευθείαν άνω φράγμα στο πλάτος μονοπατιού ενός δάσους. Τελικά η βασική πρόταση που θα χρησιμοποιήσουμε για να φράξουμε το πλάτος μονοπατιού είναι η ακόλουθη.

**Θεώρημα 15.2** *Κάθε δάσος $F$ με $n$ κορυφές περιέχει μία κορυφή $v$ τ. ώ. οι συνεκτικές συνιστώσες του $F - v$ διαμερίζονται σε δύο μέρη όπου το καθένα περιέχει το πολύ $2n/3$ κορυφές.*

Σημειώνουμε ότι τα μέρη που αναφέρει το Θεώρημα 15.2 δεν αντιστοιχούν απαραίτητα σε συνεκτικές συνιστώσες αλλά το καθένα ενάγει ένα δάσος. Μπορούμε πλέον να αποδείξουμε το βασικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας.

**Θεώρημα 15.3** *Για κάθε δάσος $F$ με το πολύ $n$ κορυφές* $\mathrm{pw}(F) = O(\log n)$.

**Απόδειξη:** Δίνουμε έναν αναδρομικό αλγόριθμο που υπολογίζει αποσύνθεση μονοπατιού με πλάτος $O(\log n)$.

Ορίζουμε ως (2/3)-διαχωριστή του $F$ έναν ελάχιστο διαχωριστή $Y$ τ. ώ. το $F - Y$ να χωρίζεται σε δύο μέρη $F_1, F_2$ (δάση) όπου το καθένα έχει το πολύ $2n/3$ κορυφές. Από το Θεώρημα 15.2 $|Y| \in \{0, 1\}$. Το σύνολο κορυφών $Y$ θα εμφανίζεται σε όλες τις τσάντες της αποσύνθεσης. Συνέχισε αναδρομικά αυτή τη διαδικασία σε κάθε ένα από τα $F_1, F_2$. Ορίζουμε δηλ. τη ρουτίνα $\mathrm{pathdecomp}(F)$ ως εξής.

1. Αν $|V(F)| \leq 2$, επέστρεψε την τετριμμένη αποσύνθεση $(X_1)$ με μία τσάντα.
2. Βρες στο $F$ (2/3)-διαχωριστή $Y$ που διαχωρίζει το $F - Y$ σε δύο δάση $F_1, F_2$.
3. Όρισε $(X_1, \ldots, X_k) := \mathrm{pathdecomp}(F_1)$ και $(Z_1, \ldots, Z_{k'}) := \mathrm{pathdecomp}(F_2)$.
4. Επέστρεψε την αποσύνθεση $(X_1 \cup Y, \ldots, X_k \cup Y, Z_1 \cup Y, \ldots, Z_{k'} \cup Y)$.

Προς αποφυγή σύγχυσης χρησιμοποιούμε τον όρο κορυφές για το δάσος εισόδου και τον όρο κόμβοι για το δέντρο με ρίζα $T_{\mathrm{rec}}$ που αναπαριστά τον αναδρομικό υπολογισμό. Κάθε κόμβος αυτού του δέντρου έχει σαν ετικέτα το δάσος $F'$ επί του οποίου πραγματοποιείται η αναδρομική κλήση.

Επειδή στο Βήμα 2, βρίσκουμε (2/3)-διαχωριστή, το βάθος της αναδρομής είναι $O(\log n)$. Σε κάθε τσάντα $X$ που επιστρέφεται από μια κλήση $\mathrm{pathdecomp}(F')$ προστίθενται μέχρι να συμπεριληφθεί στην τελική αποσύνθεση το πολύ μία κορυφή του $V(F)$ για κάθε κόμβο που βρίσκεται στο μονοπάτι που ενώνει τον κόμβο του υποπροβλήματος $F'$ με τη ρίζα του $T_{\mathrm{rec}}$. Το πλήθος αυτών των κόμβων είναι $O(\log n)$. ∎

## 15.2 Αποδείξεις που παραλείφθηκαν

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε τις αποδείξεις του Θεωρήματος 15.2 και του Λήμματος 15.1.

### 15.2.1 Απόδειξη του Λήμματος 15.1

Αν το $G - X$ περιέχει το πολύ 3 συνιστώσες, τελειώσαμε. Άρα το $G - X$ περιέχει τουλάχιστον 4 συνιστώσες. Αρχικοποιούμε τα μέρη να είναι τόσα όσες και οι συνιστώσες.

*Περίπτωση 1.* Δύο μέρη περιέχουν το καθένα περισσότερες από $\frac{1}{4}|S \setminus X|$ κορυφές. Όλα τα άλλα περιέχουν μαζί το πολύ $\frac{1}{2}|S \setminus X|$ κορυφές, οπότε τα συγχωνεύουμε και παίρνουμε ακριβώς τρία μέρη.

*Περίπτωση 2.* Ακριβώς ένα μέρος περιέχει περισσότερες από $\frac{1}{4}|S \setminus X|$ κορυφές. Τουλάχιστον τρία μέρη (από τα συνολικά τουλάχιστον 4) περιέχουν το καθένα το πολύ $\frac{1}{4}|S \setminus X|$ κορυφές. Συγχώνευσε δύο από αυτά.

Όσο υπάρχουν τουλάχιστον 4 μέρη θα εφαρμόζεται υποχρεωτικά η Περίπτωση 1 ή η Περίπτωση 2 και θα μπορούμε να μειώνουμε τον αριθμό των μερών.

### 15.2.2 Απόδειξη του Θεωρήματος 15.2

Αν το $F$ είναι δέντρο, εφαρμόζουμε το Θεώρημα 15.1 με διαχωριστή $X = \{v\}$ και κατόπιν το Λήμμα 15.2 με $S = V(F)$. Αν όχι, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

*Περίπτωση 1.* Το δάσος $F$ έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες $C_1, C_2$. Χβτγ $|V(C_1)| \geq n/2$ και $|V(C_2)| \leq n/2$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 15.1 στο $C_1$ με διαχωριστή $X = \{v\}$, προκύπτουν συνιστώσες όπου η κάθε μία έχει το πολύ $n/2$ κορυφές. Εφαρμόζουμε τώρα το Λήμμα 15.2 στο $F$ όπου $S = V(F)$, και $X = \{v\}$ και παίρνουμε την επιθυμητή διαμέριση.

*Περίπτωση 2.* Το δάσος $F$ έχει τουλάχιστον $k \geq 3$ συνεκτικές συνιστώσες. Αρχικοποιούμε μια διαμέριση των κορυφών του $F$ σε $k$ μέρη, όπου αρχικά το κάθε μέρος ταυτίζεται με μία συνεκτική συνιστώσα. Όσο τα μέρη είναι τουλάχιστον τρία, ελέγχουμε αν τα δύο μέρη με το μικρότερο αριθμό κορυφών έχουν συνολικό αριθμό κορυφών το πολύ $n/2$. Αν ναι, τα συνενώνουμε και μειώνουμε τον αριθμό των μερών κατά ένα. Όταν αυτό πλέον δεν είναι δυνατό θα έχουν μείνει το πολύ τρία μέρη με σύνολα κορυφών $A$, $B$, $C$ όπου χβτγ υποθέτουμε ότι $0 < |A| \leq |B| \leq |C|$. Αν $|A| + |B| \leq 2n/3$, συνενώνουμε τα $A, B$ και έχουμε τα δύο μέρη που μας ζητάει το λήμμα. Σε κάθε περίπτωση, $|A| \leq n/2$ και $|B| \leq n/2$. Αν $|C| \leq n/2$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 15.2 και να πάρουμε την επιθυμητή διαμέριση. Αν $|C| > n/2$, το $C$ αντιστοιχεί σε συνεκτική συνιστώσα του δέντρου $F$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 15.1 υπάρχει κορυφή $v \in C$ τέτοια ώστε το $C \setminus \{v\}$ ενάγει δάσος όπου η κάθε συνιστώσα έχει το πολύ $|C|/2 \leq n/2$ κορυφές. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 15.2 στο $G = F$, με $S = V(F)$ και $X = \{v\}$ προκύπτει διαμέριση των συνιστωσών του $F$ σε το πολύ δύο μέρη όπου το κάθε μέρος έχει το πολύ $2n/3$ κορυφές.