Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 16: 7.12.2016 — Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Βασίλης Μαργώνης

16.1 Πλάτος μονοπατιού σε πλήρη δυαδικά δέντρα

Παρατήρηση 16.1 *Σε κάθε γράφημα $G = (V, E)$ ισχύει ότι:*

$\mathrm{pw}(G) = \max_{H \in C} \mathrm{pw}(H)$, *όπου C το σύνολο των συνεκτικών συνιστωσών του G.*

Συμβολίζουμε με B_h το πλήρες δυαδικό δέντρο ύψους h.

Θεώρημα 16.1 $\mathrm{pw}(B_h) \geq \frac{h+1}{2} - 2$, $h \geq 5$.

Απόδειξη: Με επαγωγή στο ύψος h:

Βάση(1). Έστω $h = 5$, τότε:

$\mathrm{pw}(B_5) \geq \frac{5+1}{2} - 2 = 1$, ισχύει.

Βάση(2). Έστω $h = 6$, τότε:

$\mathrm{pw}(B_6) \geq \frac{6+1}{2} - 2 = 1,5 \Leftrightarrow \mathrm{pw}(B_6) \geq 2$, ισχύει.

Επαγωγικό Βήμα. Έστω $h \geq 7$, και έστω $(X_1, \ldots, X_r)$ μια αποσύνθεση μονοπατιού του B_h.

Διαλέγουμε $u \in X_1$ και $v \in X_r$. Στο B_h υπάρχει u-v μονοπάτι, έστω P.

Από γνωστό λήμμα, ισχύει ότι $X_i \cap V(P) \neq \varnothing$, $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$. Το δάσος $B_h \setminus V(P)$, το οποίο περιέχει τουλάχιστον ένα πλήρες δυαδικό δέντρο ύψους $h-2$, έχει αποσύνθεση $(X_1 \setminus V(P), \ldots, X_r \setminus V(P))$. Άρα έχουμε ότι:

$\forall i$, $|X_i| \geq |X_i \setminus V(P)| + 1$ και από επαγωγική υπόθεση,

$\max_i |X_i| \geq (\frac{(h-2)+1}{2} - 2 + 1) + 1 = \frac{h-1}{2} = \frac{h+1}{2} - 1$.

Συνεπώς, $\mathrm{pw}(B_h) \geq \frac{h+1}{2} - 1 - 1 = \frac{h+2}{2} - 2$.

∎

16.2 Υπολογισμός μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου σε γραφήματα με φραγμένο πλάτος μονοπατιού

Θεώρημα 16.2 *Έστω γράφημα G με $\mathrm{pw}(G) = w$. Τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το $\alpha(G)$ σε χρόνο $f(w) \cdot n$, όπου $n = |V(G)|$.*

Απόδειξη: Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί δυναμικό προγραμματισμό.

Έστω $(X_1, \ldots, X_r)$ μια αποσύνθεση μονοπατιού του G πλάτους w.

$\forall i \in \{1, \ldots, r\}$ και $\forall X \subseteq X_i$ συμβολίζουμε με $\alpha_i(X)$ το μέγιστο μέγεθος ανεξάρτητου συνόλου S, τέτοιο ώστε $S \subseteq X_1 \cup \ldots \cup X_i$ και $S \cap X_i = X$. Τότε:

$$\alpha(G) = \max_{X \subseteq X_r} \alpha_r(X)$$

<u>Για $i = 1$:</u>

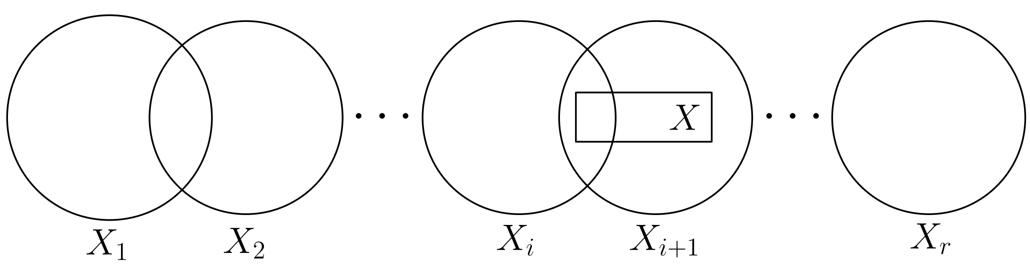
Μπορούμε, $\forall X \subseteq X_1$, να υπολογίσουμε το $\alpha_1(X)$ σε χρόνο $g(w)$, όπου g είναι μια συνάρτηση η οποία εξαρτάται μόνο απο το w.

Για συγκεκριμένο $X \subseteq X_1$, $X \neq \varnothing$:

$$\alpha_1(X) = \begin{cases} |X|, & \text{αν X ανεξάρτητο} \\ 1, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad \text{, το οποίο υπολογίζεται σε χρόνο } O(|X|^2).$$

Συνεπώς, για κάθε X υπολογίζουμε το $\alpha_1(X)$ σε χρόνο $O(2^{|X_1|} \cdot |X_1|^2) = O(2^{w+1} \cdot w^2) = g(w)$, αφού πρέπει να δοκιμάσουμε όλα τα δυνατά υποσύνολα του X_1, των οποίων το πλήθος είναι $2^{|X_1|}$.

<u>Για οποιοδήποτε $i \in \{2, \ldots, r\}$:</u>



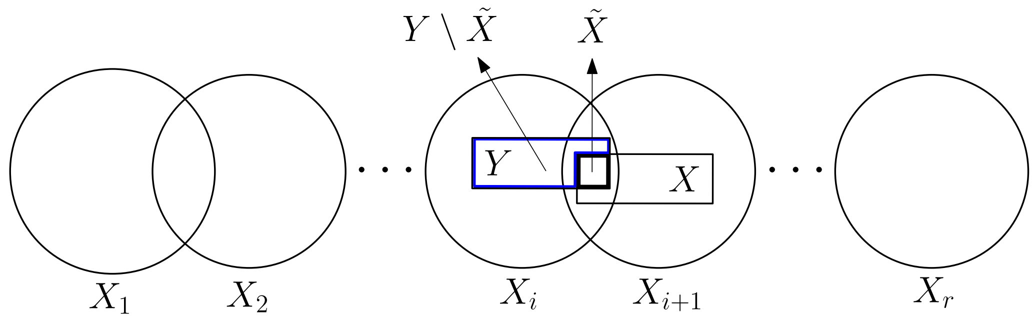
Σχήμα 16.1: Η αποσύνθεση του G, και ένα ανεξάρτητο σύνολο $X \subseteq X_{i+1}$

Σκοπός μας είναι, για δεδομένο ανεξάρτητο σύνολο X, να υπολογίσουμε το $\alpha_{i+1}(X)$. Έστω $\hat{S}$ μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο, τέτοιο ώστε $\hat{S} \subseteq X_1 \cup \ldots \cup X_i \cup X_{i+1}$ και $\hat{S} \cap X_{i+1} = X$.

Το $\hat{S}$ επομένως «πατάει» στο X_i κατά ένα ένα σύνολο Y, τέτοιο ώστε $Y \subseteq X_i$ και $Y \cap (X_i \cap X_{i+1}) \subseteq X$. Ορίζουμε επίσης το σύνολο $\tilde{X} := X \cap (X_i \cap X_{i+1}) = Y \cap (X_i \cap X_{i+1})$ (βλ. Σχήμα 16.2).

Πρέπει να βρούμε το $Y \setminus \tilde{X}$. Η άπληστη στρατηγική, παίρνοντας όλες τις κορυφές του X_i που δεν συνδέονται με το X, δεν δουλεύει. Για δεδομένο X, αν μαντέψουμε το σωστό Y παίρνουμε τη σχέση:

$$\alpha_{i+1}(X) = \alpha_i(Y) + |X \setminus \tilde{X}|$$



Σχήμα 16.2: Τα σύνολα Y, $\tilde{X}$ και η σχέση τους με το X.

Γνωρίζουμε πως $(X \setminus \tilde{X}) \cap (X_1 \cup \ldots \cup X_i) = \varnothing$, συνεπώς αποκλείεται να υπάρχει ακμή από το $X \setminus \tilde{X}$ στο $X_1 \cup \ldots \cup X_i$. Αναγκαστικά θα δοκιμάσουμε όλα τα δυνατά Y, και η αναδρομική σχέση είναι:

$$\alpha_{i+1}(X) = \max_{Y \subseteq X_i, Y \cap (X_i \cap X_{i+1}) = \tilde{X}} \{\alpha_i(Y) + |X \setminus \tilde{X}|\}$$

Όπου με $\tilde{X}$ συμβολίζουμε το $X \cap (X_i \cap X_{i+1})$.

Για κάθε ζεύγος (i, X), υπολογίζουμε το $\alpha_{i+1}(X)$ δοκιμάζοντας όλα τα δυνατά $Y \subseteq X_i$. Για κατάλληλη συνάρτηση $f(w)$, ο συνολικός χρόνος του αλγορίθμου είναι $f(w) \cdot r$.

Δεδομένου ότι $r \leq n$, υπολογίζουμε το $\alpha(G)$ σε χρόνο $f(w) \cdot n$.

∎