

## Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 19: 14.12.2016 και 15.12.2016

Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Αγγελική Χαντζηθάου

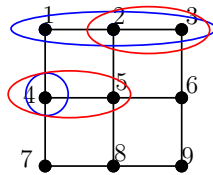
### 19.1 Σχέση πλάτους μονοπατιού και δενδροπλάτους

**Πρόταση 19.1** Το πλέγμα  $\Gamma_{n \times n}$  έχει πλάτος μονοπατιού και δενδροπλάτος το πολύ  $n$ .

**Απόδειξη:** Ορίζουμε αποσύνθεση μονοπατιού  $X_{n(i-1)+j} = \{(i, k) \mid j \leq k \leq n\} \cup \{(i+1, k) \mid 1 \leq k \leq j\}$  για  $1 \leq i \leq n-1$  και  $1 \leq j \leq n$ . Κάθε τσάντα έχει ακριβώς  $n+1$  κορυφές. ■

**Παράδειγμα 19.1** Για το πλέγμα  $\Gamma_{3 \times 3}$  βρίσκουμε αποσύνθεση μονοπατιού με 4 κορυφές σε κάθε τσάντα. Ορίζουμε τις τσάντες της αποσύνθεσης ως εξής:

$X_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $X_2 = \{2, 3, 4, 5\}$ ,  $X_3 = \{3, 4, 5, 6\}$ ,  $X_4 = \{4, 5, 6, 7\}$ ,  $X_5 = \{5, 6, 7, 8\}$ ,  $X_6 = \{6, 7, 8, 9\}$ .



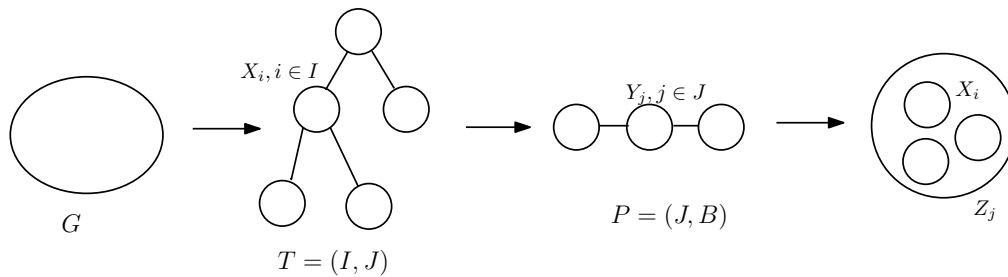
Σχήμα 19.1: Πλέγμα  $3 \times 3$ .

Γενικά  $\text{tw}(G) \leq \text{pw}(G)$ , όμως το πλάτος μονοπατιού δεν μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερο από το δενδροπλάτος.

**Θεώρημα 19.1** Για κάθε γράφημα  $G$  με  $n$  κορυφές,  $\text{pw}(G) = O(\log n \cdot \text{tw}(G))$ .

**Απόδειξη:** Έστω  $(T = (I, A), \{X_i : i \in I\})$  η δενδροαποσύνθεση του  $G$ .

Βρες αποσύνθεση μονοπατιού  $(P = (J, B), \{Y_j : j \in J\})$  του  $T$  με πλάτος  $O(\log n)$ . Η αποσύνθεση μονοπατιού του  $G$  είναι η  $(P = (J, B), \{Z_j : j \in J\})$ , όπου για κάθε  $j \in J$ ,  $Z_j = \bigcup \{X_i : i \in Y_j\}$ . Κάθε  $v \in V(G)$  εμφανίζεται σε τσάντες που φτιάχνουν συνεκτικό υποδέντρο  $T_v$  του  $T$ . Κάθε συνεκτικό υποδέντρο του  $T$  πρέπει να σκορπιστεί σε συνεχόμενο μονοπάτι του  $P$ . ■



Σχήμα 19.2: Απεικόνιση της απόδειξης του Θεωρήματος 19.1.

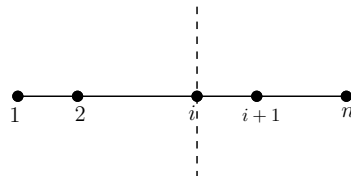
## 19.2 Εναλλακτικοί ορισμοί πλάτους μονοπατιού και δενδροπλάτους

**Ορισμός 19.1** Έστω γράφημα  $G = (V, E)$ . Μια γραμμική διάταξη των κορυφών του  $G$  είναι μια  $1 - 1$  απεικόνιση  $L : V \rightarrow \{1, 2, \dots, |V|\}$ . Η  $L$  ορίζει μια μετάθεση των κορυφών του  $G$ .

Για κάθε γραμμική διάταξη  $L$  ορίζουμε

$$V_L(i) = \{u \in V \mid L(u) \leq i \text{ και } \exists v \in V \text{ τέτοιο ώστε } \{u, v\} \in E \text{ και } L(v) > i\}.$$

Το  $V_L(i)$  είναι ο αριθμός των κορυφών που απεικονίζονται σε ακέραιο μικρότερο ή ίσο με το  $i$  και συνδέονται με ακμή με κορυφές που απεικονίζονται σε ακέραιο μεγαλύτερο από το  $i$ .



Σχήμα 19.3: Στο  $V_L(i)$  θα ανήκουν όλες οι κορυφές που βρίσκονται πριν το  $i$  στη διάταξη και συνδέονται με ακμή με κορυφές που βρίσκονται μετά το  $i$ .

**Ορισμός 19.2** Το vertex separation number του γραφήματος  $G$  για μια συγκεκριμένη γραμμική διάταξη  $L$  είναι ο μέγιστος αριθμός κορυφών ενός  $V_L(i)$ ,  $vs_L(G) = \max_{1 \leq i \leq |V|} \{|V_L(i)|\}$ .

Το vertex separation number του  $G$  είναι το ελάχιστο vertex separation number μιας γραμμικής διάταξης  $L$

$$vs(G) = \min\{vs_L(G) \mid L \text{ γραμμική διάταξη του } V(G)\}$$

**Θεώρημα 19.2** Για κάθε γράφημα  $G = (V, E)$ ,  $vs(G) = pw(G)$ .

**Απόδειξη:** (i) Θα δείξουμε ότι  $pw(G) \leq vs(G)$ . Έστω  $vs(G) = k$  και έστω  $L$  μια γραμμική διάταξη τέτοια ώστε  $vs_L(G) = k$ . Ορίζουμε σύνολα  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ως εξής:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{L^{-1}(1)\} \\ X_2 &= V_L(1) \cup \{L^{-1}(2)\} \\ &\vdots \\ X_n &= V_L(n-1) \cup \{L^{-1}(n)\}. \end{aligned}$$

Η  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  είναι αποσύνθεση μονοπατιού του  $G$ . Αφού  $vs_L(G) = k$ ,  $|V_L(i)| \leq k$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Συνεπώς,  $|X_i| \leq k+1$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Άρα,  $pw(G) \leq k = vs(G)$ .

(ii) Θα δείξουμε ότι  $vs(G) \leq pw(G)$ . Έστω  $(X_1, X_2, \dots, X_r)$  αποσύνθεση μονοπατιού του  $G$ . Κατασκευάζουμε γραμμική διάταξη  $L$ . Έστω  $|X_1| = t$  και  $L : X_1 \xrightarrow{1-1} \{1, 2, \dots, t\}$ . Επεκτείνουμε την  $L$  στο  $V$  ως εξής:

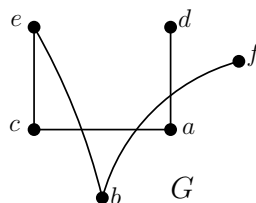
```

V' ← X1;
for i ← 2 to r do
  Y ← Xi \ V';
  while Y ≠ ∅ do
    L(y) ← |V'| + 1, για αυθαίρετο y ∈ Y;
    V' ← V' ∪ {y};
    Y ← Y \ {y};
  end
end
end
    
```

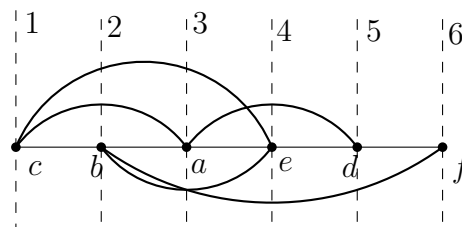
Τοποθετούμε στη διάταξη πρώτα τα στοιχεία του  $X_1$ , μετά τα στοιχεία του  $X_2 \setminus X_1$ , του  $X_3 \setminus (X_2 \cup X_1)$ , κ.ο.κ.

Για τη διάταξη που ορίσαμε ισχύει ότι  $vs_L(G) \leq pw(G)$ . ■

**Παράδειγμα 19.2** Εφαρμογή του πρώτου μέρους της απόδειξης του Θεωρήματος 19.2.



(i)



Σχήμα 19.4: Μια μετάθεση των κορυφών του  $G$ .

Για τη γραμμική διάταξη  $L$  στο Σχήμα 19.4 υπολογίζουμε το  $V_L(i)$ ,  $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$V_L(1) = \{c\}$ ,  $V_L(2) = \{c, b\}$ ,  $V_L(3) = \{c, b, a\}$ ,  $V_L(4) = \{b, a\}$ ,  $V_L(5) = \{b\}$ .  
 Ισχύει ότι  $vs_L(G) = 3$

Ορίζουμε τις τσάντες της αποσύνθεσης μονοπατιού:

$X_1 = \{L^{-1}(1)\} = \{c\}$   
 $X_2 = V_L(1) \cup \{L^{-1}(2)\} = \{c\} \cup \{b\} = \{b, c\}$   
 $X_3 = V_L(2) \cup \{L^{-1}(3)\} = \{b, c\} \cup \{a\} = \{a, b, c\}$   
 $X_4 = V_L(3) \cup \{L^{-1}(4)\} = \{c, b, a\} \cup \{e\} = \{a, b, c, e\}$   
 $X_5 = V_L(4) \cup \{L^{-1}(5)\} = \{b, a\} \cup \{d\} = \{a, b, d\}$   
 $X_6 = V_L(5) \cup \{L^{-1}(6)\} = \{b\} \cup \{f\} = \{b, f\}$   
 και βλέπουμε ότι  $pw(G) \leq 3 = vs_L(G)$

Αν βάλουμε τις κορυφές σε διαφορετική διάταξη βλέπουμε ότι  $vs(G) = pw(G) = 1$ .

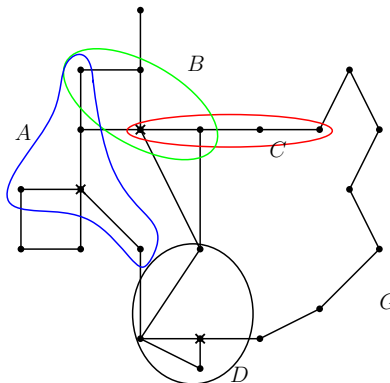


Σχήμα 19.5: Μια μετάθεση των κορυφών του  $G$  σύμφωνα με τη σειρά που εμφανίζονται στο μονοπάτι.

**Ορισμός 19.3** Δύο υπογραφήματα  $A, B$  του  $G$  αγγίζονται αν  $V(A) \cap V(B) \neq \emptyset$  ή αν υπάρχει ακμή  $\{u, v\} \in E(G)$  έτσι ώστε  $u \in V(A)$  και  $v \in V(B)$

**Ορισμός 19.4** Βάτος (bramble) στο  $G$  είναι ένα σύνολο συνεκτικών υπογραφήματων του  $G$  που αγγίζονται ανά δύο. Ένα σύνολο  $S \subseteq V(G)$  καλείται σύνολο κρούσης (hitting set) της βάτου  $\mathcal{B}$ , αν το  $S$  τέμνει κάθε στοιχείο της  $\mathcal{B}$ . Τάξη της  $\mathcal{B}$  είναι το ελάχιστο μέγεθος ενός συνόλου κρούσης. Bramble number (αριθμός βάτου) είναι η μέγιστη τάξη μιας βάτου στο  $G$ , συμβολίζεται με  $bn(G)$ .

Στο Σχήμα 19.6 φαίνεται μια βάτος που αποτελείται από τα 4 συνεκτικά υπογραφήματα του  $G$  τα οποία αγγίζονται ανά δύο είτε με κοινή κορυφή ( $A, B$  και  $B, C$ ) είτε με κοινή ακμή ( $(A, C)$ ,  $(A, D)$ ,  $(B, D)$  και  $(C, D)$ ). Η τάξη της βάτου είναι τρία αφού υπάρχει σύνολο με τρεις κορυφές που τέμνει κάθε στοιχείο της βάτου και δεν υπάρχει σύνολο κρούσης με λιγότερες από τρεις κορυφές.



Σχήμα 19.6: Βάτος που αποτελείται από 4 συνεκτικά υπογραφήματα του  $G$ .

**Θεώρημα 19.3 (Seymour, Thomas 1993)** Για κάθε γράφημα  $G$ ,  $\text{tw}(G) = \text{bn}(G) - 1$ .

Θα δείξουμε μόνο την κατεύθυνση  $\text{tw}(G) \geq \text{bn}(G) - 1$ .

**Απόδειξη:** Έστω  $\beta$  βάτος του  $G$  μέγιστης τάξης. Έστω  $T$  το δέντρο μιας δενδροαποσύνθεσης του  $G$ . Για  $A \in \beta$ , έστω  $T_A$  το υπογράφημα του  $T$  που ενάγεται από τις κορυφές των οποίων οι τσάντες περιέχουν κορυφές του  $A$ . Αφού το  $A$  είναι συνεκτικό, πρέπει και το  $T_A$  να είναι συνεκτικό. Αν  $A, B \in \beta$  τότε τα  $A$  και  $B$  αγγίζονται άρα  $V(T_A) \cap V(T_B) \neq \emptyset$ . Τα υποδέντρα του συνόλου  $\{T_A : A \in \beta\}$  τέμνονται ανά δύο (ιδιότητα Helly), άρα υπάρχει  $x \in \bigcap_{A \in \beta} V(T_A)$ , δηλαδή η τσάντα με

δείκτη  $x$  περιέχει μια κορυφή από κάθε  $V(T_A)$ ,  $A \in \beta$ . Αυτή η τσάντα είναι σύνολο χρούσης για τη βάτο  $\beta$ , άρα έχει μέγεθος τουλάχιστον  $\text{bn}(G)$ . Άρα,  $\text{tw}(G) \geq \text{bn}(G) - 1$ . ■