**Θεωρία Γραφημάτων**

Διάλεξη 2: 13.10.2016 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Αριστοτέλης Χανιώτης

## 2.1 Διαχωριστές και συνεκτικότητα

**Ορισμός 2.1** Κορυφοδιαχωριστής (vertex separator) *ή απλά* διαχωριστής, *ενός συνεκτικού γραφήματος $G = (V, E)$ καλείται ένα σύνολο $S \subseteq V$ τέτοιο ώστε το γράφημα $G \setminus S := G[V \setminus S]$ είναι μη συνεκτικό.*

**Ορισμός 2.2** *Έστω γράφημα $G = (V, E)$ μία κορυφή $v \in V$ καλείται* αρθρικό σημείο (cutpoint, cut-vertex) *αν το μονοσύνολο $\{v\}$ είναι διαχωριστής.*

**Ορισμός 2.3** *Έστω γράφημα $G = (V, E)$. Το $G = (V, E)$ είναι* $\kappa$-συνεκτικό *αν $|V(G)| > \kappa$ και το υπογράφημα $G \setminus X$ είναι συνεκτικό για κάθε $X \subseteq V$ με $|X| < \kappa$.*

**Παράδειγμα 2.1**

- *Όλα τα συνεκτικά γραφήματα με $n \geq 2$ είναι 1-συνεκτικά.*
- *Γράφημα με αρθρικό σημείο δεν είναι 2-συνεκτικό.*
- *Κάθε μη κενό γράφημα είναι 0-συνεκτικό.*
- *Αν το $G$ είναι $\kappa$-συνεκτικό με $\kappa \geq 1$ τότε το $G$ είναι και $(\kappa - 1)$-συνεκτικό.*

**Ορισμός 2.4** *Έστω γράφημα $G = (V, E)$. Ορίζουμε ως* συνεκτικότητα *του γραφήματος το μέγιστο ακέραιο $\kappa$, τέτοιον ώστε το $G$ ειναι $\kappa$-συνεκτικό. Η συνεκτικότητα συμβολίζεται με $\kappa(G)$.*

Ισοδύναμος με τον Ορισμό 2.4 είναι και ο ακόλουθος:

**Ορισμός 2.5** *Ορίζουμε ως* συνεκτικότητα *του γραφήματος $G$ τον ελάχιστο πληθικό αριθμό συνόλου $S \subseteq V$ τέτοιου ώστε το γράφημα $G \setminus S$ να είναι μη συνεκτικό ή να αποτελείται απο μία μόνο καρυφή.*

**Παράδειγμα 2.2** *Εξετάζουμε ως προς την συνεκτικότητα την κλίκα $K_n$. Εφόσον στην κλίκα για κάθε κορυφή $v \in V$ $d_{K_n}(v) = n - 1$, δεν υπάρχει διαχωριστής της κλίκας με μέγεθος μικρότερο ή ίσο του $n - 2$. Επιπλέον παρατηρούμε ότι η συνεκτικότητα δεν μπορεί να έιναι $n$ γιατί απο τον Ορισμό 2.3 πρέπει $|V(G)| > \kappa(G)$. Επομένως $\kappa(K_n) = n - 1$.*

**Παράδειγμα 2.3** *Έστω πλήρες διμερές γράφημα $G = (V, E)$ με $G = K_{m,n}$, $m \leq n$, όπου $V(G) = A \cup B$, $|A| = m$. Αν αφαιρέσουμε τις κορυφές συνόλου $S \subset V$ με $|S| < m$ τότε τα $A \setminus S$ και $B \setminus S$ είναι μη κενά και ανάμεσα σε οποιεσδήποτε δύο κορυφές του $S$ υπάρχει μονοπάτι. Επομένως $\kappa(K_{m,n}) = m$.*

**Παρατήρηση 2.1** *Παρατηρούμε ότι ένα δέντρο $G = (V, E)$ δεν μπορεί να είναι 2-συνεκτικό, διότι θα έπρεπε $\forall X \subseteq V$ με $|X| \leq 1$, το $G \setminus X$ να είναι συνεκτικό, κάτι που δεν ισχύει διότι κάθε δέντρο με $|V| \geq 3$ έχει τουλάχιστον ένα αρθρικό σημείο $v \in V$. Για $X = \{v\}$ με $|X| \leq 1$ παίρνουμε ότι το $G \setminus X$ είναι μη συνεκτικό.*

Ορίζουμε τους συμβολισμούς $\delta(G) = \min\{d_G(v) \mid v \in V(G)\}$ και αντίστοιχα για το μέγιστο βαθμό $\Delta(G) = \max\{d_G(v) \mid v \in V(G)\}$. Ο μέσος βαθμός $\overline{d}(G)$ ορίζεται με τον προφανή τρόπο ως $\sum_{v \in V} d_G(v)/n$.

**Πρόταση 2.1** *Για κάθε γράφημα $G = (V, E)$ ισχύει $\kappa(G) \leq \delta(G)$.*

**Απόδειξη:** Έστω $v \in V(G)$, τ.ω. $d_G(v) = \delta(G)$. Το σύνολο $N(v)$ είναι διαχωριστής. ∎

**Παράδειγμα 2.4** *Μπορεί $\kappa(G) << \delta(G)$. Θεώρησε $G$ που αποτελείται από δύο ξένα αντίγραφα του $K_n$.*

**Θεώρημα 2.1 (Mader, 1972)** *Κάθε γράφημα $G = (V, E)$ με μέσο βαθμό $\overline{d}(G) \geq 4k$ περιέχει ένα $k$-συνεκτικό υπογράφημα.*

**Απόδειξη:** Για το γράφημα $G$ θέτουμε $|V| = n$ και $|E| = m$.

Για $k \in \{0, 1\}$ το ζητούμενο ισχύει κατα τρόπο τετριμμένο Για τη συνέχεια της απόδειξης χρειάζεται να παρατηρήσουμε ότι για $k \geq 2$ απο την υπόθεση $\overline{d}(G) \geq 4k$ έπονται οι εξής δύο σχέσεις:

$$\begin{Bmatrix} n \geq 2k - 1 & \text{(i)} \\ m \geq (2\kappa - 3)(n - k + 1) + 1 & \text{(ii)} \end{Bmatrix}$$

Για την (i) έχουμε ότι : $n > \Delta(G) \geq \overline{d(G)} \geq 4k > 2k - 1$
Για τη (ii) έχουμε $m = \frac{\overline{d}(G)n}{2} \geq 2kn \geq (2k-3)(n-k+1)+1$ Επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας, αρκεί να δείξουμε το θεώρημα σε ένα γράφημα $G$ που ικανοποιεί τις (i) και (ii). Συνεχίζουμε την απόδειξη με επαγωγή στο πλήθος $n$ των κορυφών του γραφήματος.

- *Επαγωγική βάση.* $n = 2k-1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}(n+1)$. Μέσω της (ii) παίρνουμε ότι $m \geq \frac{1}{2}n(n-1) = \binom{n}{2}$. Επομένως $G = K_n$, και αφού $2k - 1 \geq k + 1$, το $G$ περιέχει σαν υπογράφημα το $K_{k+1}$ το οποίο είναι $k$-συνεκτικό.

- *Επαγωγικό Βήμα.* Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $n > 2k - 1$. Έστω $n \geq 2k$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

  1. Υπάρχει κορυφή $v$ με $d_v \leq 2k - 3$. Τότε το $G \setminus v$ έχει $n'$ κορυφές και $m'$ ακμές, όπου $n' = n - 1 \geq 2k - 1$ και έτσι ικανοποιείται η (i). Επιπλέον $m' \geq m - (2k - 3) \geq (2k - 3)(n' - k + 1) + 1$ εφ' όσον $m \geq (2\kappa - 3)(n - k + 1) + 1$. Άρα στο $G \setminus v$ ισχύει και η (ii). Επομένως απο επαγωγική υπόθεση το $G \setminus v$ περιέχει ένα $k$-συνεκτικό υπογράφημα.

2. Έστω $\delta(G) \geq 2k-2$. Αν το $G$ είναι $k$-συνεκτικό, έχουμε το ζητούμενο. Αν το $G$ δεν είναι $k$-συνεκτικό, υπάρχει διαχωριστής $X \subseteq V(G)$ με $|X| < k$ τέτοιος ώστε το $G \setminus X$ να διαμερίζεται σε δύο υπογραφήματα με σύνολα κορυφών αντίστοιχα $V_1, V_2$ τ.ω. το γράφημα $G[V_1 \cup V_2]$ είναι μη συνεκτικό. Ορίζουμε $G_i = G[V_i \cup X]$, $i = 1, 2$. Παρατηρούμε ότι κάθε ακμή του $G$ θα βρίσκεται είτε στο $G_1$ είτε στο $G_2$ είτε και στα δύο, δεν υπάρχει δηλαδή ακμή του $E(G)$ η οποία να έχει τη μία της κορυφή στο $G_1$ και την άλλη στο $G_2$. Έχουμε ακόμα ότι κάθε κορυφή στο $V_i, i = 1, 2$, έχει τουλάχιστον $\delta(G) \geq 2k-2$ γείτονες στο $G_i$. Επομένως $|G_1|, |G_2| \geq 2k-1$ και έτσι σε κάθε ένα απο τα δύο υπογραφήματα ισχύει η (i). Αν σε τουλάχιστον ένα απο τα $G_i, i = 1, 2$ ισχύει η (ii) τότε απο την επαγωγική υποθέση αυτό θα έχει $k$-συνεκτικό υπογράφημα και έτσι θα έχουμε το ζητούμενο.

   Υποθέτουμε τώρα προς άτοπο ότι σε κανένα απο τα $G_i, i = 1, 2$ δεν ισχύει η (ii). Επομένως για $i = 1, 2$
   $$|E(G_i)| \leq (2k-3)(n-k+1)$$
   οπότε
   $m \leq |E(G_1)| + |E(G_2)| \leq (2k-3)(|V(G_1)| + |V(G_2)| - 2k + 2) \leq (2k-3)(n-k+1)$
   Άτοπο.

   Για την απόδειξη της τελευταίας ανισότητας χρησιμοποιήσαμε την ακόλουθη σχέση
   $$|V(G_1)| + |V(G_2)| - (k-1) \leq |V(G_1)| + |V(G_2)| - |V(G_1) \cap V(G_2)| = n$$
   που με τη σειρά της ισχύει γιατί $|V(G_1) \cap V(G_2)| = |X| \leq k-1$.

∎