

Πόρισμα 20.1 Για κάθε πλέγμα $\Gamma_{r \times r}$, ισχύει $\text{pw}(\Gamma_{r \times r}) = \text{tw}(\Gamma_{r \times r}) = r$.

Απόδειξη: Ξέρουμε πως $\text{tw}(\Gamma_{r \times r}) \leq \text{pw}(\Gamma_{r \times r}) \leq r$. Άρα $\text{tw}(\Gamma_{r \times r}) = r$. ■

Παρατήρηση 20.1 Έστω $\omega'(G) = \max_t \{\text{το } G \text{ περιέχει το } K_t \text{ ως έλασσον}\}$. Ισχύει $\omega'(G) \geq \omega(G)$.

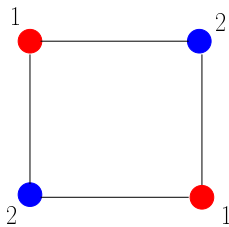
Βρήκαμε ότι υπάρχουν γραφήματα G τέτοια ώστε $\text{bn}(G) \gg \omega'(G)$. Για παράδειγμα, το πλέγμα περιέχει ως έλασσον μέχρι το K_4 , αλλά το bn (αριθμός βάρου) του είναι μη φραγμένο.

20.2 Χρωματισμός Γραφημάτων

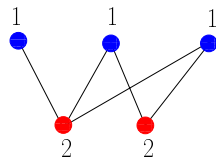
Ορισμός 20.1 k -χρωματισμός του G είναι μία συνάρτηση $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, τέτοια ώστε αν $\{x, y\} \in E(G)$, τότε $f(x) \neq f(y)$. Το G λέγεται k -χρωματίσιμο αν υπάρχει k -χρωματισμός. Ο χρωματικός αριθμός $\chi(G)$ είναι το ελάχιστο k τέτοιο ώστε το G να είναι k -χρωματίσιμο.

Παράδειγμα 20.1 Ο χρωματικός αριθμός διαφόρων γραφημάτων:

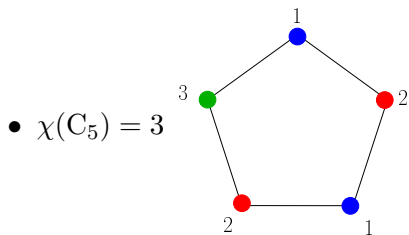
- $\chi(K_n) = n$



- $\chi(C_4) = 2$

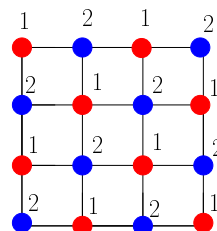


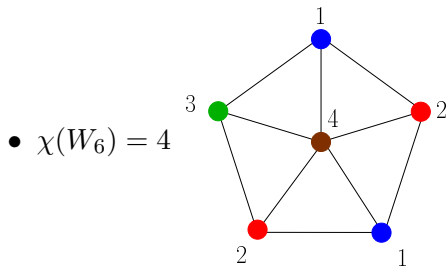
- G διμερές, $\chi(G) = 2$



- $\chi(C_5) = 3$

- $\chi(\Gamma_{r \times r}) = 2$ (το πλέγμα είναι διμερές γράφημα)





Παρατήρηση 20.2 Αν f είναι ένας k -χρωματισμός του G , τότε $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, το $f^{-1}(i)$ είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο. $\chi(G)$ είναι ο ελάχιστος αριθμός ανεξάρτητων συνόλων που χρειαζόμαστε για να καλύψουμε το $V(G)$.

Πρόταση 20.1 Αν το H είναι ένα υπογράφημα του G , τότε $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Παρατήρηση 20.3 Σε κάθε γράφημα G ισχύει ότι $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Πρόταση 20.2 Σε κάθε γράφημα G ισχύει ότι $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$, όπου $\alpha(G)$ είναι το independence number του γραφήματος.

Απόδειξη: Έστω $\chi(G) = k$. Ένας k -χρωματισμός του G ορίζει διαμέριση $V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_k$, όπου V_i ανεξάρτητο σύνολο, $i \in \{1, \dots, k\}$.

$$\left. \begin{array}{l} |V_i| \leq \alpha(G) \\ |V(G)| = \sum_{i=1}^k |V_i| \end{array} \right\} \implies |V(G)| \leq k \cdot \alpha(G) \implies k = \chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$$

■

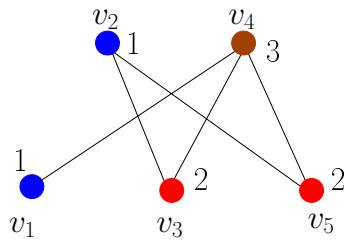
Πρόταση 20.3 Για κάθε γράφημα $G = (V, E)$, $U \subseteq V$, ισχύει $\chi(G) \leq \chi(G[U]) + \chi(G[V \setminus U])$.

Απόδειξη: Χρωμάτισε το U χρησιμοποιώντας $\chi(G[U])$ χρώματα και το $V \setminus U$ με $\chi(G[V \setminus U])$ καινούργια χρώματα.

■

Ορισμός 20.2 Δίνεται διάταξη v_1, \dots, v_n του $V(G)$. Ο άπληστος χρωματισμός (greedy coloring) προκύπτει αναθέτοντας στο v_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, το χρώμα με το μικρότερο δείκτη που δεν έχει ανατεθεί στα στοιχεία του συνόλου $\{v_1, \dots, v_{i-1}\} \cap N(v_i)$.

Ορισμός 20.3 Έστω $G = (V, E)$. Λέμε ότι το G είναι k -εκφυλισμένο (k -degenerate), αν κάθε υπογράφημα του έχει κορυφή με βαθμό μικρότερο ή ίσο του k .

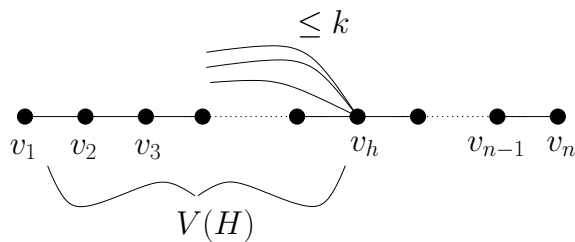


Σχήμα 20.2: Εφαρμογή του άπληστου χρωματισμού [Ορισμός 20.2] σε ένα γράφημα G . Παρατηρώ ότι το G είναι διμερές, οπότε $\chi(G) = 2$. Δηλαδή ο άπληστος χρωματισμός δεν δίνει βέλτιστο αποτέλεσμα.

Πρόταση 20.4 Το G είναι k -εκφυλισμένο αν υπάρχει διάταξη v_1, \dots, v_n του $V(G)$, τέτοια ώστε για κάθε i , η v_i έχει το πολύ k γείτονες ανάμεσα στις v_1, \dots, v_{i-1} .

Απόδειξη:

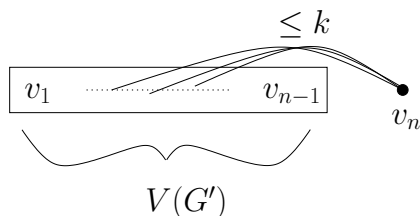
« \implies » Αν υπάρχει τέτοια διάταξη, για οποιοδήποτε υπογράφημα H , θεωρήσε τη μεγαλύτερη κορυφή v_h του $V(H)$ στη διάταξη [Σχήμα 20.3]. Αυτή η κορυφή έχει το πολύ k γείτονες στο H , άρα το G είναι k -εκφυλισμένο.



Σχήμα 20.3: Η v_h έχει το πολύ k γείτονες προς τα αριστερά.

« \impliedby » Έστω G k -εκφυλισμένο. Αποδεικνύουμε την ύπαρξη κατάλληλης διάταξης με επαγωγή στο n . Αφού το G είναι k -εκφυλισμένο, υπάρχει $v \in V(G)$ τέτοιο ώστε $d_G(v) \leq k$.

Ονόμασε το v , v_n και όρισε $G' = G \setminus v_n$. Εύκολα, το G' ομοίως είναι k -εκφυλισμένο και από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει κατάλληλη διάταξη v_1, \dots, v_{n-1} του $V(G')$. Η διάταξη v_1, \dots, v_{n-1}, v_n ικανοποιεί τις ιδιότητες που απαιτούμε για το G [Σχήμα 20.4].

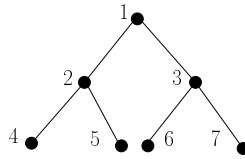


Σχήμα 20.4: Η διάταξη v_1, \dots, v_{n-1}, v_n του G .

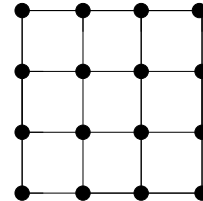


Παράδειγμα 20.2 Διάφορα k -εκφυλισμένα γραφήματα:

- Κάθε δέντρο είναι 1-εκφυλισμένο.



- Το $\Gamma_{r \times r}$ είναι 2-εκφυλισμένο (η γωνία έχει πάντα βαθμό 2).



Ορισμός 20.4 Ο βαθμός εκφυλισμού (degeneracy) ενός γραφήματος G ορίζεται ως $dg(G) = \min\{k \mid G \text{ } k\text{-εκφυλισμένο}\}$

Παράδειγμα 20.3 Για κάθε δάσος F ισχύει $dg(F) \leq 1$.

Παρατήρηση 20.4 Σε κάθε γράφημα G ισχύει ότι $\delta(G) \leq dg(G) \leq \Delta(G)$.

Θεώρημα 20.2 Σε κάθε γράφημα G ισχύει ότι $\chi(G) \leq 1 + dg(G)$.

Απόδειξη: Ονομάζουμε $k = dg(G)$. Φιζάρουμε διάταξη v_1, \dots, v_n του $V(G)$, τέτοια ώστε κάθε v_i να έχει το πολύ k γείτονες ανάμεσα στις v_1, \dots, v_{i-1} . Χρησιμοποιούμε τον άπληστο χρωματισμό [Ορισμός 20.2]. Χρειαζόμαστε το πολύ $k + 1$ χρώματα, γιατί όταν ο αλγόριθμος χρωματίζει το v_i , το πολύ k χρώματα είναι απαγορευμένα.



Πόρισμα 20.2 Σε κάθε γράφημα G ισχύει ότι $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$.

Παράδειγμα 20.4

- $\chi(K_n) = \Delta(K_n) + 1$
- $\chi(C_{2n+1}) = \Delta(C_{2n+1}) + 1$