Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 21: 21.12.2016 | Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Σ. Κ.

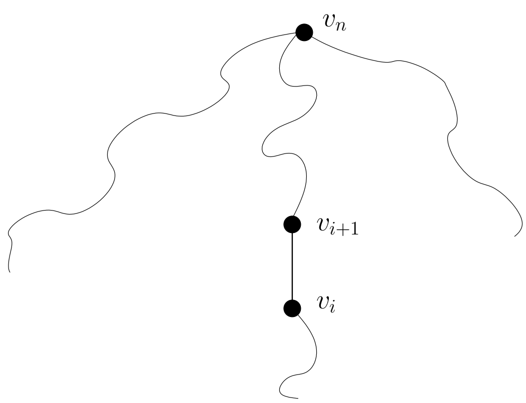
21.1 Το Θεώρημα του Brooks

Στην προηγούμενη διάλεξη δείξαμε ότι σε κάθε γράφημα G, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ και δώσαμε τα C_{2k+1} και K_n ως παραδείγματα γραφημάτων που πιάνουν αυτό το άνω φράγμα. Θα αποδείξουμε ότι αυτές οι δύο κατηγορίες γραφημάτων είναι τα μοναδικά τέτοια παραδείγματα.

Θεώρημα 21.1 (Brooks, 1941) *Αν G συνεκτικό γράφημα που δεν είναι ούτε κλίκα ούτε περιττός κύκλος, τότε $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Απόδειξη: Θέτουμε $k = \Delta(G)$. Για $k = 1$ το G είναι η κλίκα K_2. Για $k = 2$, εάν το G έχει κύκλο, αποκλείεται να έχει ακμές εκτός κύκλου. Άρα το G μπορεί να είναι είτε περιττός κύκλος είτε άρτιος κύκλος είτε δέντρο. Στις δύο τελευταίες περιπτώσεις το G είναι διμερές, άρα $\chi(G) = 2$. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε στο εξής ότι $k \geq 3$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.

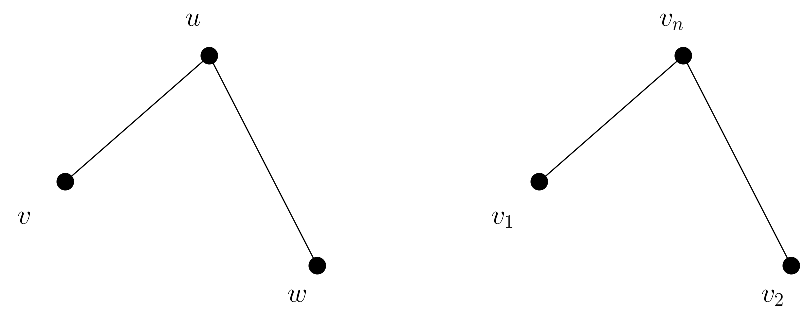


Σχήμα 21.1: Απεικόνιση της Περίπτωσης 1.

Περίπτωση 1. Αν το G δεν είναι k-κανονικό γράφημα, διάλεξε $v \in V(G)$ τ. ώ. $d(v) < k$ και θέσε $v_n := v$. Φτιάχνουμε επικαλύπτον δέντρο με ρίζα v_n αναθέτοντας δείκτες στις κορυφές σε φθίνουσα διάταξη καθώς απομακρύνομαστε από τη ρίζα. Στη διάταξη $v_1, \ldots, v_n$ που προκύπτει, κάθε κορυφή εκτός της v_n έχει γείτονα με μεγαλύτερο δείκτη στο μονοπάτι προς τη ρίζα. Βλ. Σχήμα 21.1. Άρα κάθε κορυφή έχει το πολύ $k-1$ γείτονες με μικρότερο δείκτη. Επομένως $\mathrm{dg}(G) \leq k-1$ και άρα $\chi(G) \leq k$.

Περίπτωση 2. Το G είναι k-κανονικό. Διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις.

Περίπτωση 2α. Το G περιέχει αρθρικό σημείο x. Έστω G' ένας x-λοβός, τότε $d_{G'}(x) < k$. Βρίσκουμε k-χρωματισμό του G' όπως στην Περίπτωση 1. Κάνουμε το ίδιο σε όλους τους x-λοβούς και με κατάλληλη μετάθεση των χρωμάτων υποχρεώνουμε τους επιμέρους χρωματισμούς να συμφωνούν στο x.

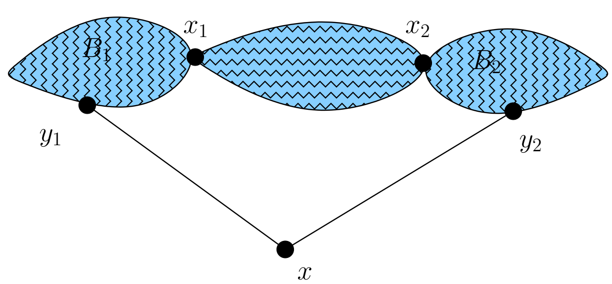


Σχήμα 21.2: Νύχι (claw) που χρησιμοποιείται στην Περίπτωση 2β.

Περίπτωση 2β. Το G περιέχει κορυφή u με δύο γείτονες v, w που δεν συνδέεονται με ακμή. Επιπλέον $G - \{v, w\}$ συνεκτικό. Αριθμούμε τα v, u, w ως v_1, v_n, v_2 αντίστοιχα. Βλ. Σχήμα 21.2. Βρίσκουμε επικαλύπτον δέντρο με ρίζα v_n στο $G - \{v_1, v_2\}$ και αριθμούμε τις υπόλοιπες κορυφές του $v_3, \ldots, v_{n-1}$ όπως στην Περίπτωση 1. Κάθε κορυφή v_i με $i < n$ στη διάταξη $v_1, v_2, \ldots, v_n$ έχει τουλάχιστον ένα γείτονα v_j με $j > i$, άρα έχει το πολύ $k - 1$ γείτονες με μικρότερο δείκτη. Ο v_n έχει το πολύ $k - 2$ γείτονες ανάμεσα στους $v_3, \ldots, v_{n-1}$. Υπολογίζουμε τον άπληστο χρωματισμό με βάση τη συγκεκριμένη διάταξη και παλέτα k χρωμάτων. Αναθέτουμε το ίδιο χρώμα στους v_1, v_2 οπότε όταν χρωματίζουμε το v_n το πολύ $k - 1$ χρώματα είναι απαγορευμένα.

Απομένει να δείξουμε ότι όταν δεν συμβαίνει η Περίπτωση 2α συμβαίνει πάντα η Περίπτωση 2β. Δηλαδή θα δείξουμε ότι αν το G είναι k-κανονικό, $k \geq 3$, και δεν περιέχει αρθρικό σημείο, τότε το G περιέχει ως εναγόμενο υπογράφημα ένα μονοπάτι (v, u, w) (το οποίο είναι ισόμορφο με το $K_{1,2}$) και $G - \{v, w\}$ είναι συνεκτικό. Ένα γράφημα ισόμορφο με το $K_{1,2}$ καλείται *νύχι (claw)*.

Επειδή το G δεν είναι κλίκα, υπάρχουν $x, y \in V(G)$ τ. ώ. $\mathrm{dist}_G(x, y) \geq 2$. Επομένως οι δύο πρώτες ακμές $\{x, u\}, \{u, y'\}$ του συντομότερου μονοπατιού από το x στο y ορίζουν νύχι. Αν $\kappa(G - x) \geq 2$, έχουμε ότι $G - \{x, y'\}$ συνεκτικό.



Σχήμα 21.3: Απεικόνιση των τεμαχίων του $G - x$ μαζί με τις συνδέσεις του x.

Αν $\kappa(G - x) = 1$, εξετάζουμε το γράφημα των τεμαχίων (μπλοκ) του $G - x$. Το $G - x$ περιέχει αρθρικό σημείο, άρα θα έχει τουλάχιστον δύο τεμάχια και το γράφημα των τεμαχίων (που είναι πάντα δέντρο), θα περιέχει τουλάχιστον δύο φύλλα (end blocks). Έστω B_1, B_2 αυτά τα δύο μπλοκ και x_1, x_2 τα αρθρικά σημεία του $G - x$ που ανήκουν στα B_1 και B_2 αντίστοιχα. Αφού $\kappa(G) \geq 2$, υπάρχει $y_i \in V(B_i) \setminus \{x_i\}$,

$i = 1, 2$, τ. ώ. y_1, y_2 γείτονες του x στο G. Από τον ορισμό των μπλοκ, τα y_1, y_2 δεν είναι γειτονικά στο G. Βλ. Σχήμα 21.3. Επειδή $\kappa(G - x) = 1$ έπεται ότι $G - \{x, y_1, y_2\}$ συνεκτικό. Αφού $k \geq 3$, παίρνουμε ότι $d_G(x) \geq 3$, άρα το $G - \{y_1, y_2\}$ είναι επίσης συνεκτικό γράφημα. Πάλι βρήκαμε νύχι στο G. ∎