

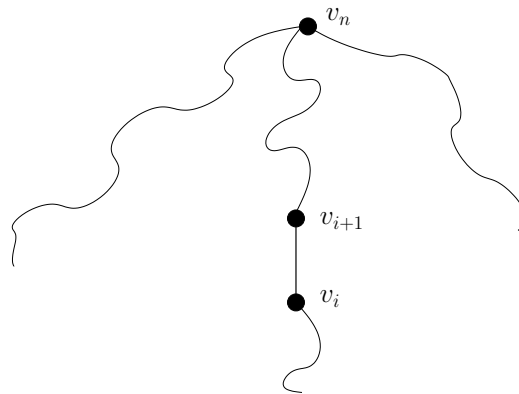
## 21.1 Το Θεώρημα του Brooks

Στην προηγούμενη διάλεξη δείξαμε ότι σε κάθε γράφημα  $G$ ,  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$  και δώσαμε τα  $C_{2k+1}$  και  $K_n$  ως παραδείγματα γραφημάτων που πιάνουν αυτό το άνω φράγμα. Θα αποδείξουμε ότι αυτές οι δύο κατηγορίες γραφημάτων είναι τα μοναδικά τέτοια παραδείγματα.

**Θεώρημα 21.1 (Brooks, 1941)** *Αν  $G$  συνεκτικό γράφημα που δεν είναι ούτε κλίκα ούτε περιττός κύκλος, τότε  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .*

**Απόδειξη:** Θέτουμε  $k = \Delta(G)$ . Για  $k = 1$  το  $G$  είναι η κλίκα  $K_2$ . Για  $k = 2$ , εάν το  $G$  έχει κύκλο, αποκλείεται να έχει ακμές εκτός κύκλου. Άρα το  $G$  μπορεί να είναι είτε περιττός κύκλος είτε άρτιος κύκλος είτε δέντρο. Στις δύο τελευταίες περιπτώσεις το  $G$  είναι διμερές, άρα  $\chi(G) = 2$ . Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε στο εξής ότι  $k \geq 3$ .

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.



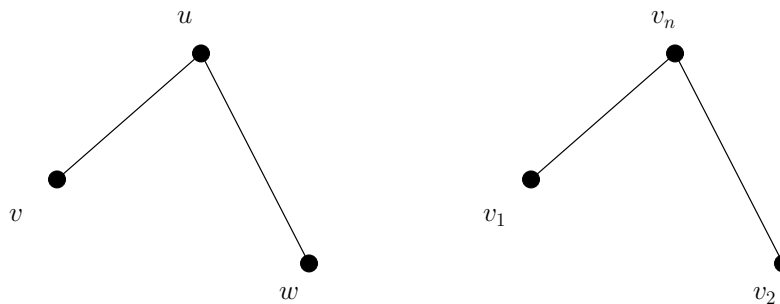
Σχήμα 21.1: Απεικόνιση της Περίπτωσης 1.

**Περίπτωση 1.** Αν το  $G$  δεν είναι  $k$ -κανονικό γράφημα, διάλεξε  $v \in V(G)$  τ. ώ.  $d(v) < k$  και θέσε  $v_n := v$ . Φτιάχνουμε επικάλυπτον δέντρο με ρίζα  $v_n$  αναθέτοντας δείκτες στις κορυφές σε φθίνουσα διάταξη καθώς απομακρύνομαστε από τη ρίζα. Στη διάταξη  $v_1, \dots, v_n$  που προκύπτει, κάθε κορυφή εκτός της  $v_n$  έχει γείτονα με μεγαλύτερο δείκτη στο μονοπάτι προς τη ρίζα. Βλ. Σχήμα 21.1. Άρα κάθε κορυφή έχει το πολύ  $k - 1$  γείτονες με μικρότερο δείκτη. Επομένως  $\text{dg}(G) \leq k - 1$  και άρα  $\chi(G) \leq k$ .

**Περίπτωση 2.** Το  $G$  είναι  $k$ -κανονικό. Διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις.

**Περίπτωση 2α.** Το  $G$  περιέχει αριθρικό σημείο  $x$ . Έστω  $G'$  ένας  $x$ -λοβός, τότε  $d_{G'}(x) < k$ . Βρίσκουμε  $k$ -χρωματισμό του  $G'$  όπως στην Περίπτωση 1. Κάνουμε το ίδιο σε όλους τους  $x$ -λοβούς και με

κατάλληλη μετάθεση των χρωμάτων υποχρεώνουμε τους επιμέρους χρωματισμούς να συμφωνούν στο  $x$ .

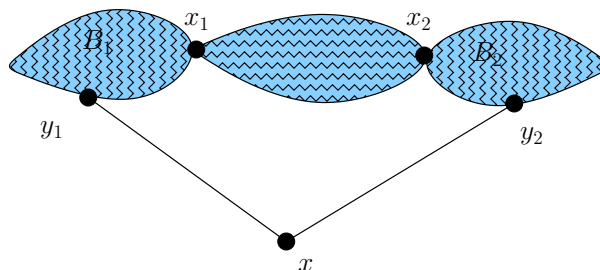


Σχήμα 21.2: Νύχι (claw) που χρησιμοποιείται στην Περίπτωση 2β.

*Περίπτωση 2β.* Το  $G$  περιέχει κορυφή  $u$  με δύο γείτονες  $v, w$  που δεν συνδέονται με ακμή. Επιπλέον  $G - \{v, w\}$  συνεκτικό. Αριθμούμε τα  $v, u, w$  ως  $v_1, v_n, v_2$  αντίστοιχα. Βλ. Σχήμα 21.2. Βρίσκουμε επικαλύπτον δέντρο με ρίζα  $v_n$  στο  $G - \{v_1, v_2\}$  και αριθμούμε τις υπόλοιπες κορυφές του  $v_3, \dots, v_{n-1}$  όπως στην Περίπτωση 1. Κάθε κορυφή  $v_i$  με  $i < n$  στη διάταξη  $v_1, v_2, \dots, v_n$  έχει τουλάχιστον ένα γείτονα  $v_j$  με  $j > i$ , άρα έχει το πολύ  $k - 1$  γείτονες με μικρότερο δείκτη. Ο  $v_n$  έχει το πολύ  $k - 2$  γείτονες ανάμεσα στους  $v_3, \dots, v_{n-1}$ . Υπολογίζουμε τον άπληστο χρωματισμό με βάση τη συγκεκριμένη διάταξη και παλέτα  $k$  χρωμάτων. Αναθέτουμε το ίδιο χρώμα στους  $v_1, v_2$  οπότε όταν χρωματίζουμε το  $v_n$  το πολύ  $k - 1$  χρώματα είναι απαγορευμένα.

Απομένει να δείξουμε ότι όταν δεν συμβαίνει η Περίπτωση 2α συμβαίνει πάντα η Περίπτωση 2β. Δηλαδή θα δείξουμε ότι αν  $G$  είναι  $k$ -κανονικό,  $k \geq 3$ , τότε το  $G$  περιέχει ως εναγόμενο υπογράφημα ένα μονοπάτι  $(v, u, w)$  (το οποίο είναι ισόμορφο με το  $K_{1,2}$ ) και  $G - \{v, w\}$  είναι συνεκτικό. Ένα γράφημα ισόμορφο με το  $K_{1,2}$  καλείται *νύχι (claw)*.

Επειδή το  $G$  δεν είναι κλίκα, υπάρχουν  $x, y \in V(G)$  τ. ώ.  $\text{dist}_G(x, y) \geq 2$ . Επομένως οι δύο πρώτες ακμές  $\{x, u\}, \{u, y'\}$  του συντομότερου μονοπατιού από το  $x$  στο  $y$  ορίζουν νύχι. Αν  $\kappa(G - x) \geq 2$ , δηλ. το  $x$  δεν είναι αρθρικό σημείο του  $G$ , έχουμε ότι  $G - \{x, y'\}$  συνεκτικό.



Σχήμα 21.3: Απεικόνιση των τεμαχίων του  $G - x$  μαζί με τις συνδέσεις του  $x$ .

Αν  $\kappa(G - x) = 1$ , εξετάζουμε το γράφημα των τεμαχίων (μπλοκ) του  $G - x$ . Πρέπει να περιέχει δύο φύλλα (end blocks) γιατί το  $G$  δεν είναι ισόμορφο με το  $K_3$ . Έστω  $B_1, B_2$  αυτά τα δύο μπλοκ και  $x_1, x_2$  τα αρθρικά σημεία του  $G - x$  που ανήκουν στα  $B_1$  και  $B_2$  αντίστοιχα. Αφού  $\kappa(G) \geq 2$ , υπάρχει  $y_i \in V(B_i) \setminus \{x_i\}$ ,  $i = 1, 2$ , τ. ώ.  $y_1, y_2$  γείτονες του  $x$  στο  $G$ . Από τον ορισμό των μπλοκ, τα  $y_1, y_2$

δεν είναι γειτονικά. Βλ. Σχήμα 21.3. Επειδή  $\kappa(G - x) = 1$  έπεται ότι  $G - \{x, y_1, y_2\}$  συνεκτικό. Αφού  $k \geq 3$ , παίρνουμε ότι  $d_G(x) \geq 3$ , άρα το  $G - \{y_1, y_2\}$  είναι επίσης συνεκτικό γράφημα. Πάλι βρήκαμε νύχι στο  $G$ . ■