Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 23: 11 & 12.01.2017 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Ιωάννης Μπαρούμας

23.1 Κατασκευή Mycielski (συνέχεια)

Θεώρημα 23.1 *Αν ένα γράφημα G δεν περιέχει τρίγωνα και $\chi(G) = k$, η κατασκευή του Mycielski παράγει γράφημα G' που δεν περιέχει τρίγωνα με $\chi(G') = k + 1$.*

Απόδειξη: Έστω γράφημα G χωρίς τρίγωνα και $\chi(G) = k$. Αφού $\{u_i\}_{i\in[n]}$ ανεξάρτητο στο G' και δεν υπάρχουν ακμές από το $V(G)$ στο w, στο G' δεν υπάρχουν τρίγωνα που να περιέχουν το w. Οποιοδήποτε τρίγωνο περιέχει μια κορυφή u_i, πρέπει να έχει δύο άλλες κορυφές στο $V(G)$ και αυτές θα ήταν γειτονικές του v_i. Άρα ο G θα περιείχε τρίγωνο, που δεν ισχύει.

Ένας k-χρωματισμός του G επεκτείνεται σε $(k-1)$-χρωματισμό του G', θέτοντας $f(u_i) = f(v_i)$ και $f(w) = k + 1$. Άρα $\chi(G') \le k + 1$.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει k-χρωματισμός του G'. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $g(w) = k$, που περιορίζει τις τιμές του g στο $\{u_i\}_{i\in[n]}$ στο $[k-1]$.

Έστω $A := \{v_i : g(v_i) = k\}$. Θα κατασκευάσουμε $(k-1)-$χρωματισμό του G. Για κάθε $v_i \in A$, αλλάζουμε το χρώμα του σε $g(u_i)$. Το g αποτελεί νόμιμο χρωματισμό, άρα το A είναι ανεξάρτητο σύνολο στο G', άρα και στο G. Αρκεί να ελέγξουμε τις ακμές $\{v_i, v'\}, v' \in V(G \setminus A)$ και $v_i \in A$. Αν $\{v_i, v'\} \in E(G)$, τότε $\{u_i, v'\} \in E(G')$, άρα $g[u_i] \ne g[v']$. Άρα η αλλαγή χρώματος του v_i από k σε $g[u_i]$ δεν δημιουργεί πρόβλημα. Τελικά βρήκαμε $(k-1)$-χρωματισμό του G, άτοπο. ∎

Παρατήρηση 23.1 *Έστω $M_2 = K_2$ με $\chi(M_2) = 2$. Σε i βήματα έχουμε M_{i+2} με $\chi(M_{i+2}) = 2 + i$. Όμως $\omega(M_{i+2}) = 2$ και $\chi(G) >> \omega(G)$.*

Εικασία 23.1 (Hadwiger, 1943) *Αν $\chi(G) \ge t$, το G περιέχει το K_t ως έλασσον.*

23.2 Χρωματισμός και περιφέρεια

Ορισμός 23.1 Περιφέρεια (girth) *ενός γραφήματος είναι το μήκος του μικρότερου κύκλου που περιέχεται σε αυτό.*

Γραφήματα με μεγάλη περιφέρεια τοπικά μοιάζουν με δέντρα. Θα δείξουμε όμως ότι υπάρχουν γραφήματα με μεγάλη περιφέρεια και μεγάλο χρωματικό αριθμό. Η απόδειξη θα κάνει χρήση της πιθανοτικής μεθόδου.

Η πιθανοτική μέθοδος απόδειξης στην θεωρία γραφημάτων δουλεύει ως εξής. Για να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός γραφήματος με μια συγκεκριμένη ιδιότητα, κατασκευάζουμε μια κατανομή πιθανότητας πάνω σε όλα τα γραφήματα. Στην συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι ένα γράφημα με την απαιτούμενη ιδιότητα έχει μη μηδενική πιθανότητα σε αυτή την κατανομή.

Έστω X και Y διακριτές τυχαίες μεταβλητές. Ισχύουν τα εξής:
(i) $E[X] = \sum_x xPr(X = x)$.
(ii) $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$.
(iii) Ανισότητα του Markov: Για $X \geq 0$ ισχύει $Pr(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}, \forall a > 0$.
(iv) Union Bound: $Pr(A \cup B) \leq Pr(A) + Pr(B)$.

Θεώρημα 23.2 (Erdős, 1959) *Για οποιεσδήποτε σταθερές k και l, υπάρχει γράφημα G με $\chi(G) > k$ και περιφέρεια μεγαλύτερη του l.*

Απόδειξη: Έστω $G_{n,p}$ τυχαίο γράφημα με n κορυφές όπου κάθε ακμή περιλαμβάνεται ανεξάρτητα, με πιθανότητα p, όπου $p = n^{\lambda-1}, \lambda \in \left(0, \frac{1}{l}\right)$.

Ορίζουμε τυχαία μεταβλητή X, η οποία ισούται με τον αριθμό των κύκλων μήκους το πολύ l στο $G_{n,p}$. Ισχύει ότι ο αριθμός των κύκλων μήκους i είναι μικρότερος ή ίσος του n^i.

Έχουμε $E[X] \leq \sum_{i=3}^{l} n^i p^i = \sum_{i=3}^{l} n^{\lambda i} < 2n^{\lambda l}$. Επειδή $\lambda l < 1$ για αρκετά μεγάλο n ισχύει ότι $2n^{\lambda l} < \frac{n}{4}$.

Από Ανισότητα Markov έχουμε: $Pr\left[X \geq \frac{n}{2}\right] \leq \frac{E[X]}{\frac{n}{2}}$. Για αρκετά μεγάλο n έχουμε:

$$Pr\left[X \geq \frac{n}{2}\right] < \frac{\frac{n}{4}}{\frac{n}{2}} \Rightarrow Pr\left[X \geq \frac{n}{2}\right] < \frac{1}{2} \tag{23.1}$$

Ορίζουμε $a = \left\lceil \frac{3}{p} \ln n \right\rceil$. Τότε $Pr\left[a(G) \geq a\right] \leq \binom{n}{a}(1-p)^{\binom{a}{2}} \overset{1}{\leq} \binom{n}{a} e^{-p\binom{a}{2}} \leq n^a e^{-p\frac{a(a-1)}{2}} \overset{2}{\leq} n^a e^{-3\ln n\left(\frac{a-1}{2}\right)} = n^a n^{-3\frac{a-1}{2}} \rightarrow 0$. Τελικά για αρκετά μεγάλο n ισχύει ότι:

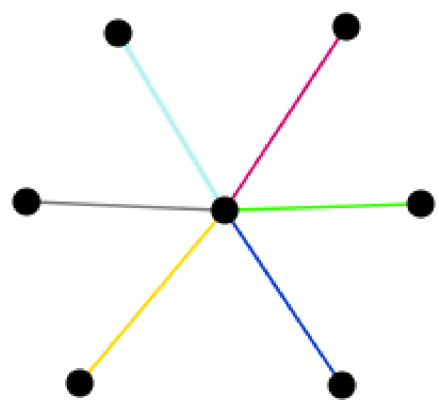
$$Pr\left[a(G) \geq a\right] < \frac{1}{2}. \tag{23.2}$$

Από τις (23.1), (23.2) έχουμε $Pr\left[X \geq \frac{n}{2} \text{ ή } a(G) \geq a\right] < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Άρα με μη μηδενική πιθανότητα υπάρχει γράφημα G με αριθμό κύκλων μήκους το πολύ l μικρότερο από $\frac{n}{2}$ και $a(G) < a$. Σβήνοντας μια κορυφή από κάθε κύκλο με μήκος μικρότερο ή ίσο του l παίρνουμε γράφημα G' με $|G'| \geq \frac{n}{2}$. Έχουμε $\text{girth}(G') > l$ και $a(G') < a$. Τότε, $\chi(G') \geq \frac{|G'|}{a(G')} \geq \frac{\frac{n}{2}}{3n^{1-\lambda}\ln n} = \frac{n^{\lambda}}{6\ln n} > k$ για αρκετά μεγάλο n. ■

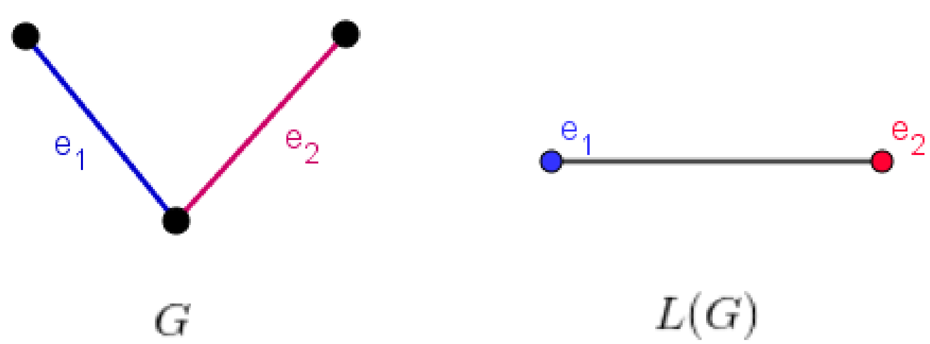
[1] Χρησιμοποιούμε την ανισότητα $1 + x \leq e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.
[2] $a \geq \frac{3}{p} \ln n \Rightarrow pa \geq 3\ln n \Rightarrow e^{-pa} \leq e^{-3\ln n}$.

23.3 Ακμοχρωματισμός Γραφημάτων

Ορισμός 23.2 $k-$ακμοχρωματισμός (k-edge-coloring) *του* G *είναι μια συνάρτηση* $f : E(G) \to [k]$ *τέτοια ώστε ακμές που μοιράζονται κορυφή να έχουν διαφορετικό χρώμα. Το* G *λέγεται* k-ακμοχρωματίσιμο *αν έχει* k*-ακμοχρωματισμό. Ο* ακμοχρωματικός αριθμός του G (edge-chromatic number ή chromatic index) *συμβολίζεται με* $\chi'(G)$ *και είναι ίσος με το ελάχιστο* k *τέτοιο ώστε το* G *να είναι* k*-ακμοχρωματίσιμο.*



Σχήμα 23.1: $\chi'(K_{1,6}) = 6$ αφού όλες οι ακμές μοιράζονται μια κοινή κορυφή.



Σχήμα 23.2: Ο ακμοχρωματικός αριθμός ενός γραφήματος είναι ίδιος με τον χρωματικό αριθμό του γραμμικού του γραφήματος.

Παρατηρήσεις

(i) $\chi'(G) = \chi(L(G))$.
(ii) $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.
(iii) Αν $\Delta(G) = \Delta$ τότε $\Delta(L(G)) \leq 2(\Delta - 1) \Rightarrow \chi(L(G)) \leq \Delta(L(G)) + 1 \overset{(i)}{\Rightarrow} \chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1 \Rightarrow \Delta(G) \leq \chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$.

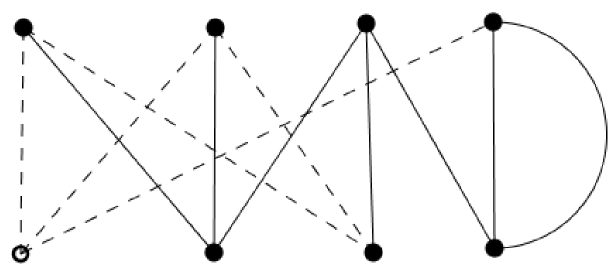
Θεώρημα 23.3 (Vizing, 1964) *Για κάθε απλό γράφημα* G *ισχύει ότι* $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Θεώρημα 23.4 (Holyer, 1980) *Δεδομένου ενός γραφήματος G ο υπολογισμός του $\chi'(G)$ είναι NP-hard πρόβλημα.*

Παρατήρηση 23.2 *Ένας ακμοχρωματισμός του G ορίζει διαμέριση του $E(G)$ σε ταιριάσματα (ανεξάρτητα σύνολα ακμών).*

Θεώρημα 23.5 (Kőnig, 1916) *Αν G διμερές πολυγράφημα, τότε $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Απόδειξη: Από το Θεώρημα Hall προκύπτει ότι κάθε διμερές κανονικό πολυγράφημα H έχει τέλειο ταίριασμα. Επαγωγικά στο $\Delta(H)$, παίρνουμε $\Delta(H)$-ακμοχρωματισμό. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε διμερές πολυγράφημα G με $\Delta(G) = k$ υπάρχει k-κανονικό διμερές γράφημα H που είναι υπεργράφημα του G.



Σχήμα 23.3: Με μαύρο χρώμα συμβολίζουμε τις ακμές και τις κορυφές του αρχικού γραφήματος, ενώ διακεκομμένες είναι οι ακμές που προσθέτουμε στα ζεύγη του G'.

Αν το G έχει άνισα μέρη, προσθέτουμε κορυφές στο μικρότερο έτσι ώστε να εξισωθούν. Αν το G' που προκύπτει δεν είναι κανονικό, κάθε μέρος περιέχει κορυφή με βαθμό μικρότερο του $\Delta(G') = \Delta(G)$. Προσθέτουμε μια ακμή ανάμεσα στο ζεύγος. Συνεχίζουμε μέχρι το γράφημα να γίνει k-κανονικό (Βλ. Σχήμα 23.3). ∎