Θεωρία Γραφημάτων

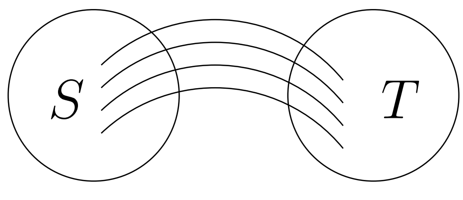
Διάλεξη 3: 19.10.2016 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Βασίλης Λίβανος

3.1 Ακμοδιαχωριστές, Τομές, Δεσμοί

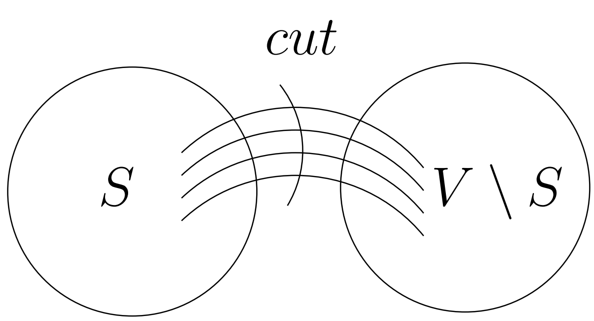
Ορισμός 3.1 Ακμοδιαχωριστής (Edge-Separator) *ενός γραφήματος* $G = (V, E)$ *καλείται ένα σύνολο* $F \subseteq E$ *των ακμών του* G *τέτοιο ώστε το γράφημα* $G \setminus F$ *έχει περισσότερες από μία συνεκτικές συνιστώσες.*

Έστω δύο σύνολα κορυφών $S, T \subseteq V$. Ορίζουμε ως $[S, T] = \{e \in E \mid |e \cap S| = |e \cap T| = 1\}$ το σύνολο των ακμών από το S στο T.



Σχήμα 3.1: Το σύνολο των ακμών από το S στο T.

Εάν $\overline{S} := V \setminus S$, τότε το $[S, \overline{S}]$ καλείται *τομή (cut)*. Κάθε τομή είναι ακμοδιαχωριστής.

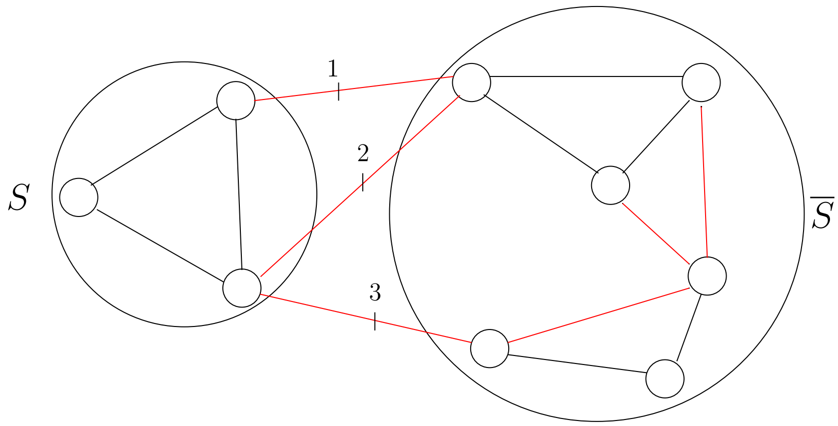


Σχήμα 3.2: Τομή σε ένα γράφημα G.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα:

Ένα σύνολο F (ακμών ή κορυφών) του G καλείται *ελαχιστικό (minimal)* ως προς μία ιδιότητα P εάν για κάθε $F' \subset F$, το F' δεν έχει την ιδιότητα P. Αντίστοιχα, το F καλείται *μεγιστικό (maximal)* εάν για κάθε $F' \supset F$, το F' δεν έχει την ιδότητα P.

Πρόταση 3.1 *Έστω γράφημα* G. *Εάν* $|G| > 1$, *τότε κάθε ελαχιστικός ακμοδιαχωριστής* F *είναι και τομή.*



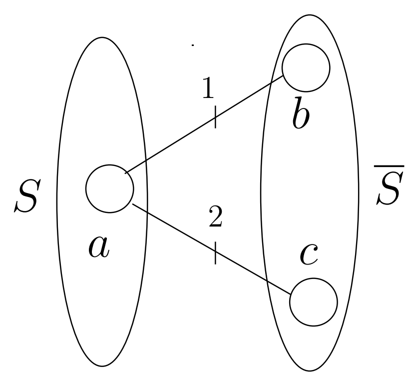
Σχήμα 3.3: Το σύνολο των κόκκινων ακμών είναι ακμοδιαχωριστής αλλά όχι τομή. Το σύνολο ακμών $\{1, 2, 3\}$ είναι τομή.

Απόδειξη: Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Εάν το $G \setminus F$ έχει ακριβώς 2 συνεκτικές συνιστώσες τότε είναι προφανές ότι η πρόταση ισχύει.
- Εάν το $G \setminus F$ έχει πάνω από 2 συνεκτικές συνιστώσες τότε για κάποια από αυτές, έστω την H, όλες οι ακμές που φεύγουν από το H είναι υποσύνολο του F ($\partial(H) \subseteq F$). Άρα $F \supseteq [V(H), \overline{V(H)}]$. Τότε όμως ο F δεν είναι ελαχιστικός ακμοδιαχωριστής, εκτός εάν $F = [V(H), \overline{V(H)}]$.

∎

Έστω το G:

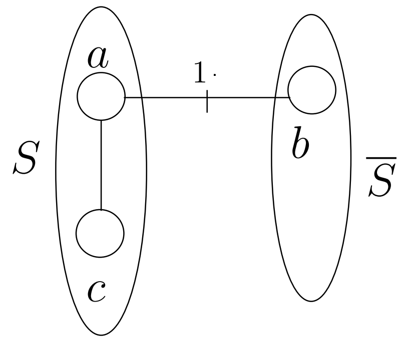


Σχήμα 3.4: Τομή μεταξύ των S, $\overline{S}$.

Το $F = \{1, 2\}$ είναι τομή αλλά όχι ελαχιστική, αφού το $F' = \{1\}$ είναι τομή για $S' = \{a, c\}$, $\overline{S'} = \{b\}$, η οποία είναι ελαχιστική.

Ορισμός 3.2 Δεσμός (bond) *καλείται μία ελαχιστική μη κενή τομή.*

Πρόταση 3.2 *Έστω γράφημα G. Εάν το G είναι συνεκτικό, τότε μία τομή F είναι δεσμός ανν $G \setminus F$ έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες.*

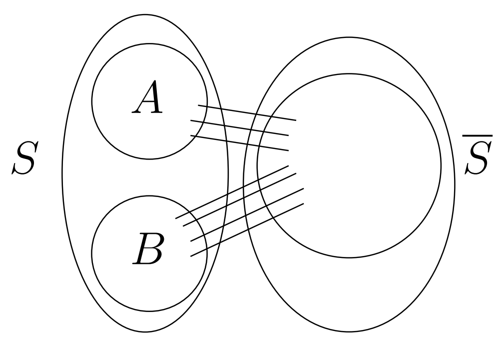


Σχήμα 3.5: Ελαχιστική τομή μεταξύ των S', $\overline{S'}$.

Απόδειξη:

'$\Leftarrow$' Έστω $F = [S, \overline{S}]$. Αν το $G \setminus F$ έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες, τότε έστω $F' \subset F$. Το $G \setminus F'$ περιέχει τις δύο συνιστώσες του $G \setminus F$ συν τουλάχιστον μία ακμή ανάμεσά τους. Επομενως, το $G \setminus F'$ έχει μία συνιστώσα. Άρα το F είναι δεσμός.

'$\Rightarrow$' Αντιστρόφως, έστω ότι το $G \setminus F$ έχει τουλάχιστον τρεις συνιστώσες. Άρα, τουλάχιστον ένα εκ των $G[S]$ και $G[\overline{S}]$ έχει τουλάχιστον δύο συνιστώσες. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι το $G[S]$ έχει τουλάχιστον δύο συνιστώσες, τις A και B ($S = A \cup B$).



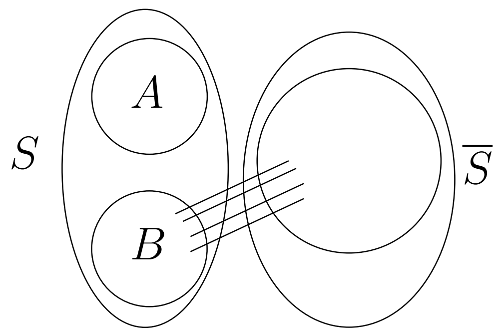
Σχήμα 3.6: Οι τρεις συνιστώσες του $G \setminus F$.

Τότε, οι τομές $[A, \overline{A}]$ και $[B, \overline{B}]$ είναι γνήσια υποσύνολα του $[S, \overline{S}]$, αλλιώς το G δεν θα ήταν συνεκτικό. (Για παράδειγμα, έστω ότι $[S, \overline{S}] = [B, \overline{B}]$. Τότε το A ήταν ήδη αποκομμένο από το B στο G, άρα το G δεν είναι συνεκτικό.)

Συνεπώς, το $[S, \overline{S}]$ δεν είναι δεσμός.

Επομένως, εάν το $F = [S, \overline{S}]$ είναι δεσμός, τότε το γράφημα $G \setminus F$ έχει ακριβώς δύο συνιστώσες.

∎



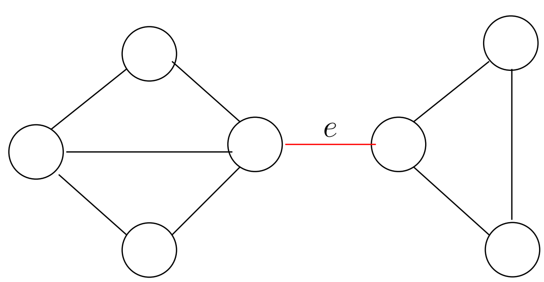
Σχήμα 3.7: Το S δεν είναι συνεκτικό, επομένως ούτε και το G.

3.2 Ακμοσυνεκτικότητα

Ορισμός 3.3 *Ένα γράφημα G λέγεται κ-*ακμοσυνεκτικό (κ-edge-connected) *εάν κάθε ακμοδιαχωριστής έχει τουλάχιστον κ ακμές.*

Ορισμός 3.4 *Σε ένα γράφημα G, το ελάχιστο μέγεθος ακμοδιαχωριστή ονομάζεται* ακμοσυνεκτικότητα (edge-connectivity), *και συμβολίζεται με $\kappa'(G)$.*

Ορισμός 3.5 *Μία ακμή που αποσυνδέει το G ονομάζεται* γέφυρα (bridge).

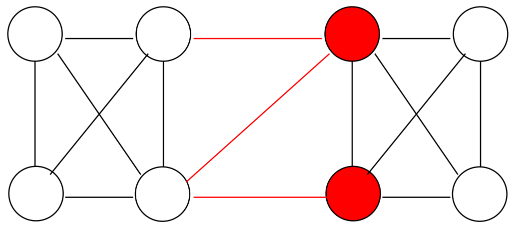


Σχήμα 3.8: Η ακμή e είναι γέφυρα στο παραπάνω γράφημα.

Παράδειγμα 3.1 *Η κλίκα μεγέθους n, $G = K_n$, έχει $\kappa'(G) = n - 1 = \kappa(G) = \delta(G)$.*

Παράδειγμα 3.2 *Έστω το G:*

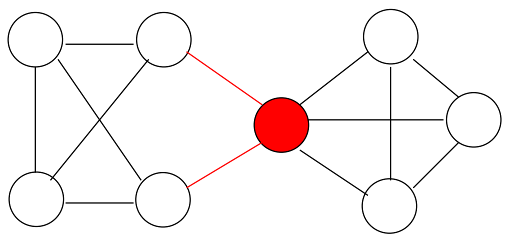
Έχουμε ότι:



Σχήμα 3.9: Ο ακμοδιαχωριστής και ο κορυφοδιαχωριστής σημειώνονται με κόκκινο χρώμα.

- $\kappa(G) = 2$
- $\kappa'(G) = 3$
- $\delta(G) = 3$

Παράδειγμα 3.3 *Έστω το G:*



Σχήμα 3.10: Ο ακμοδιαχωριστής και ο κορυφοδιαχωριστής σημειώνονται με κόκκινο χρώμα.

Έχουμε ότι:

- $\kappa(G) = 1$
- $\kappa'(G) = 2$
- $\delta(G) = 3$

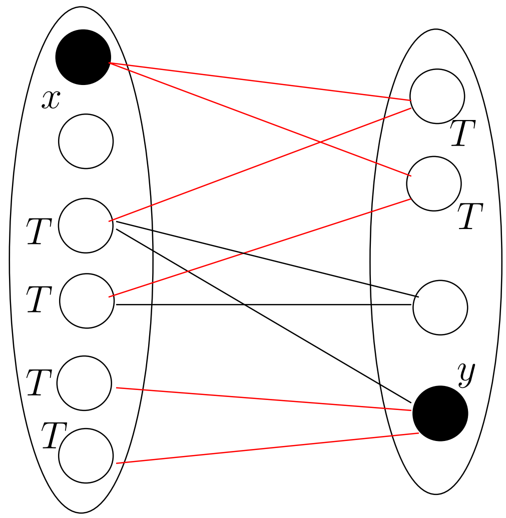
Θεώρημα 3.1 (Whitney, 1932) *Σε κάθε γράφημα $G = (V, E)$ ισχύει: $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$.*

Απόδειξη: Είναι προφανές ότι για κάθε γράφημα G ισχύει $\kappa'(G) \leq \delta(G)$. Έστω μία κορυφή $v \in V(G)$ τέτοια ώστε $d_G(v) = \delta(G)$. Τότε, αφαιρώντας όλες τις ακμές που προσπίπτουν στη v, καθιστούμε το γράφημα μη συνεκτικό, επομένως $\kappa'(G) \leq \delta(G)$.

Θα δείξουμε τώρα ότι $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$.

Έστω $|G| > 1$ και $[S, \overline{S}]$ μία ελάχιστη τομή. Τότε, $\kappa'(G) = |[S, \overline{S}]|$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Περίπτωση 1: Κάθε κορυφή $u \in S$ γειτονεύει με κάθε κορυφή $v \in \overline{S}$, οπότε $\kappa'(G) = |S|(|G| - |S|)$. Τότε το $\kappa'(G)$ ελαχιστοποιείται για $|S| = 1$. Επομένως $\kappa'(G) \geq |G| - 1$, όμως $\kappa(G) \leq |G| - 1$, άρα και $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$.



Σχήμα 3.11: Το σύνολο των ακμών που επιλέγουμε σημειώνεται με κόκκινο χρώμα.

- Περίπτωση 2: Υπάρχουν δύο κορυφές $x \in S$ και $y \in \overline{S}$ τέτοιες ώστε $\{x, y\} \notin E(G)$.

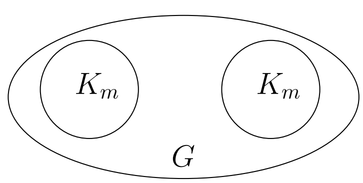
  Έστω T το σύνολο των κορυφών του $\overline{S}$ που γειτονεύουν με το x και των κορυφών του $S \setminus \{x\}$ που γειτονεύουν με το $\overline{S}$. Σβήνοντας το T από το G, σβήνουμε και όλες τις ακμές του $[S, \overline{S}]$. Όμως, $x, y \notin T$. Άρα το σύνολο T είναι κορυφοδιαχωριστής. Επομένως, $\kappa(G) \leq |T|$. Επιλέγουμε τις ακμές από την κορυφή x προς το σύνολο κορυφών $T \cap \overline{S}$. Επίσης, από κάθε κορυφή $u \in T \cap S$, επιλέγουμε μία ακμή. Παρατηρούμε πως έχουμε επιλέξει ακριβώς $|T|$ ακμές που είναι υποσύνολο του $[S, \overline{S}]$. Επομένως, $\kappa(G) \leq |T| \leq |[S, \overline{S}]| = \kappa'(G)$.

∎

Παράδειγμα 3.4 *Έστω το γράφημα $G = K_{m,n}$, με $m \leq n$. Τότε $\kappa(G) = m$ και $\delta(G) = m$. Επομένως, κατευθείαν γνωρίζουμε ότι $\kappa'(G) = m$.*

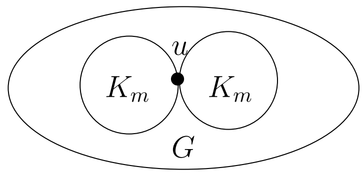
Αξίζει να σημειωθεί πως για ένα γράφημα G, οι τιμές των $\kappa(G)$, $\kappa'(G)$ και $\delta(G)$ δεν είναι απαραίτητο να είναι κοντά μεταξύ τους.

Παράδειγμα 3.5 *Έστω το παρακάτω γράφημα G που αποτελείται από δύο συνεκτικές συνιστώσες, η κάθε μία ισόμορφη με το K_m:*



Σχήμα 3.12: Στο γράφημα G έχουμε $\kappa(G) = \kappa'(G) = 0$, όμως $\delta(G) = m - 1$.

Παράδειγμα 3.6 *Έστω το παρακάτω γράφημα G:*

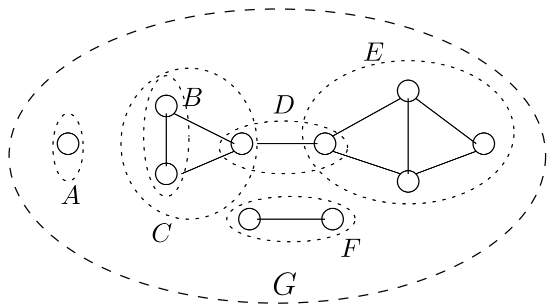


Σχήμα 3.13: Στο γράφημα G έχουμε $\kappa(G) = 1$, αφού η κορυφή u είναι αρθρικό σημείο. Όμως, $\kappa'(G) = \delta(G) = m - 1$.

3.3 2-Συνεκτικά Γραφήματα

Ορισμός 3.6 Μπλοκ (block) *ή* τεμάχιο *ενός γραφήματος G ονομάζεται ένα μεγιστικό συνεκτικό υπογράφημα του G που δεν έχει αρθρικό σημείο.*

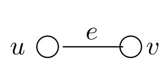
Παράδειγμα 3.7 *Έστω το παρακάτω γράφημα G:*



Σχήμα 3.14: Τα σύνολα κορυφών A, C, D, E και F είναι μπλοκ, ενώ το σύνολο B δεν είναι μεγιστικό υπογράφημα χωρίς αρθρικό σημείο, επομένως δεν είναι μπλοκ.

Παρατήρηση 3.1 *Για ένα γράφημα G ισχύουν τα παρακάτω:*

- *Ένα μπλοκ του G είναι δισυνεκτικό εάν έχει τουλάχιστον τρεις κορυφές.*
- *Εάν ένα μπλοκ του G έχει ακριβώς δύο κορυφές, δηλαδή είναι το*



Σχήμα 3.15: Μπλοκ που αποτελείται από ακριβώς δύο κορυφές.

και το γράφημα G είναι συνεκτικό, τότε η ακμή e είναι γέφυρα στο G.

Απόδειξη: *Έστω ότι η e δεν είναι γέφυρα. Τότε υπάρχει μία ακμή e' που συνδέει τις συνιστώσες των άκρων της e. Όμως τότε οι e, e' ανήκουν σε κύκλο, άρα το $G[\{u, v\}]$ δεν είναι μεγιστικό υπογράφημα χωρίς αρθρικό σημείο, επομένως δεν είναι μπλοκ.* ∎

- *Εάν ένα μπλοκ του G αποτελείται μόνο από μία κορυφή u, τότε η u είναι απομονωμένη στο G (δηλαδή $d_G(u) = 0$).*

Απόδειξη: *Έστω ότι η u δεν είναι απομονωμένη κορυφή στο G. Τότε υπάρχει μία ακμή $e = \{u, v\} \in E(G)$, οπότε το $G[\{u, v\}]$ δεν έχει αρθρικό σημείο, άρα η κορυφή u δεν είναι μεγιστικό υπογράφημα, οπότε δεν είναι μπλοκ, επομένως καταλήγουμε σε άτοπο.* ■