Θεωρία Γραφημάτων

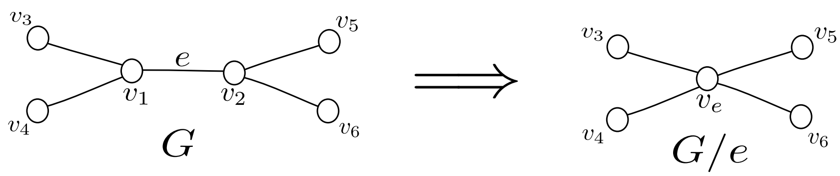
Διάλεξη 5: 26.10.2016 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Γεώργιος Πιτσιλαδής

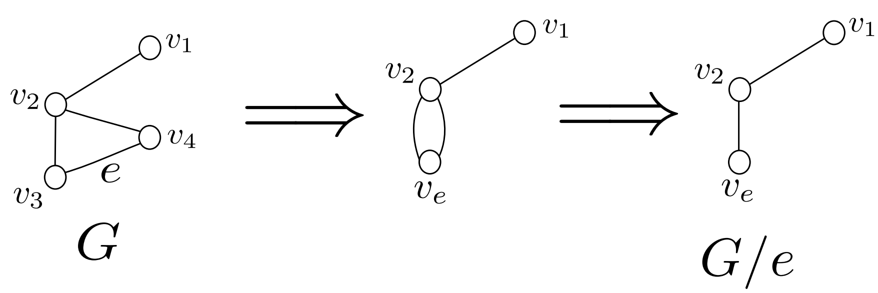
5.1 Εναλλακτική απόδειξη του Θεωρήματος Menger

Ορισμός 5.1 Σύνθλιψη ακμής $e = \{v_i, v_j\}$ *στο* $G = (V, E)$ *είναι η πράξη που παράγει το γράφημα* G/e *εισάγοντας κορυφή* v_e *που δεν ανήκει στο* V *και νέες ακμές ώστε η* v_e *να γειτονεύει με κάθε κορυφή του* $\mathrm{N}(e)$ *και σβήνοντας τις* v_i, v_j *και τυχόν παράλληλες ακμές που προκύπτουν. Το σύνολο* $\mathrm{N}(e) = \{v \in V \mid \{v, v_i\} \in E \text{ ή } \{v, v_j\} \in E\}$ *καλείται* γειτονιά *της ακμής* $e = \{v_i, v_j\}$.

Προσοχή! Το G/e να μη συγχέεται με το $G \setminus \{e\}$.



Σχήμα 5.1: Σύνθλιψη της ακμής $e = \{v_1, v_2\}$.



Σχήμα 5.2: Σύνθλιψη της ακμής $e = \{v_3, v_4\}$. Παρατηρούμε το σβήσιμο των παράλληλων ακμών.

Ακολουθεί επαναδιατύπωση του θεωρήματος του Menger και μια εναλλακτική απόδειξή του:

Θεώρημα 5.1 *Έστω* $G = (V, E)$ *και* $S, T \subseteq V$. *Ο μέγιστος αριθμός διακεκριμένων* S-T *μονοπατιών είναι ίσος με το ελάχιστο μέγεθος ενός* S-T *διαχωριστή.*

Απόδειξη: Με επαγωγή στο $|\mathrm{E}(G)|$.

Βάση. Έστω $|\mathrm{E}(G)| = 0$. Τότε προφανώς το $S \cap T$ είναι (ο ελάχιστος) S-T διαχωριστής και υπάρχουν ακριβώς $|S \cap T|$ (τετριμμένα) διακεκριμένα S-T μονοπάτια.

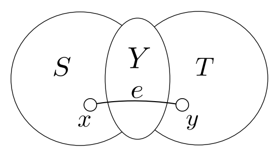
Επαγωγικό Βήμα. Έστω $e = \{x, y\} \in \mathrm{E}(G)$ και k το ελάχιστο μέγεθος S-T διαχωριστή στο G.

Παρατήρηση 5.1 *Αν το G δεν περιέχει k διακεκριμένα S-T μονοπάτια, ούτε το G/e περιέχει. Επίσης, κάθε μονοπάτι του G/e έχει ένα αντίστοιχο μονοπάτι στο G.*

Αρκεί επομένως να βρούμε k διακεκριμένα μονοπάτια στο G/e. Αν κάθε S-T διαχωριστής στο G/e έχει μέγεθος τουλάχιστον k, εφαρμόζουμε την Επαγωγική Υπόθεση και τελειώσαμε.

Έστω λοιπόν S-T διαχωριστής Y στο G/e με $|Y| < k$. Για να αποφύγουμε τις ασάφειες, ορίζουμε πως $v_e \in S$ (αντ. $v_e \in T$) αν τουλάχιστον ένα από τα x, y ανήκει στο S (αντ. στο T). Με βάση τα παραπάνω, το $X = (Y \setminus \{v_e\}) \cup \{x, y\}$ είναι S-T διαχωριστής στο G, διότι το Y «σκοτώνειG=(V,E) όλα τα S-T μονοπάτια στο G εκτός από εκείνα που διέρχονται από την e.

Εξ ορισμού, $|X| \leq |Y| + 1 \leq k$ και επειδή το X είναι S-T διαχωριστής στο G, $|X| \geq k$. Θεωρούμε το $G - e$. Αφού $x, y \in X$, κάθε S-X διαχωριστής στο $G - e$ είναι επίσης S-T διαχωριστής στο G (και άρα περιέχει τουλάχιστον k κορυφές), διότι κάθε μονοπάτι του G από το S στο T περνάει από το X και η ακμή e δεν μπορεί να δημιουργήσει μονοπάτια από το S στο T που δεν διέρχονται πρώτα από το X.



Εφαρμόζοντας την Επαγωγική Υπόθεση στο $G - e$, υπάρχουν k διακεκριμένα S-X μονοπάτια και k διακεκριμένα X-T μονοπάτια στο $G - e$. Καθώς το X διαχωρίζει τα S, T στο G, τα $2k$ μονοπάτια δεν τέμνονται εκτός του X και, επειδή είναι διακεκριμένα, μπορούμε να τα ενώσουμε ανά δύο και να φτιάξουμε k S-T διακεκριμένα μονοπάτια. ∎

5.2 Συνέπειες του Θεωρήματος Menger

Πόρισμα 5.1 *Έστω $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ και $v \in \mathrm{V}(G) \setminus S$. Ο ελάχιστος αριθμός κορυφών διαφορετικών του v που διαχωρίζουν το $\{v\}$ από το S στο G είναι ίσος με το μέγιστο αριθμό μονοπατιών που φτιάχνουν μια $\{v\}$-S βεντάλια (fan). Μία $\{v\}$-S* βεντάλια *είναι ένα σύνολο $\{v\}$-S μονοπατιών που τέμνονται μόνο στο v.*

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Menger με $T = \mathrm{N}(v)$.

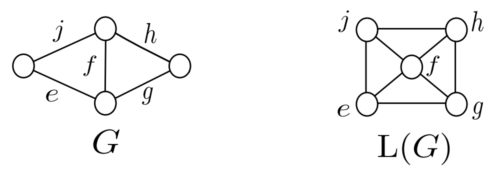
Παρατήρηση 5.2 *Κάθε S-$\mathrm{N}(v)$ διαχωριστής είναι και S-$\{v\}$ διαχωριστής.*

Παρατήρηση 5.3 *Ένας S-$\{v\}$ διαχωριστής που δεν περιέχει το v είναι και S-$\mathrm{N}(v)$ διαχωριστής.*

Από τις παραπάνω παρατηρήσεις και το Θεώρημα του Menger, ο ελάχιστος αριθμός κορυφών διαφορετικών του v που διαχωρίζουν το $\{v\}$ από το S στο G είναι ίσος με τον μέγιστο αριθμό διακεκριμένων μονοπατιών από το S στο $\mathrm{N}(v)$. Αν κάποιο από τα μονοπάτια αυτά διέρχεται από το v, τότε περιέχει υπομονοπάτι από το S στο $\mathrm{N}(v)$ που δεν διέρχεται από το v. Προσαρτώντας τελικά το v σε καθένα από τα S-$\mathrm{N}(v)$ διακεκριμένα μονοπάτια που βρήκαμε, παίρνουμε τη βεντάλια. ∎

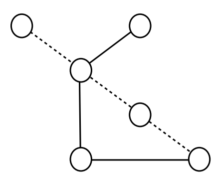
Παρατηρήστε ότι το Πόρισμα 5.1 δεν αναφέρει τη συνεκτικότητα $\kappa(G)$. Το Λήμμα του Dirac κάνει τη σχετική σύνδεση και παρέχει ένα χαρακτηρισμό της συνεκτικότητας. Βλ. Θεώρημα 4.2.23 στο D. West, Introduction to Graph Theory, 2nd edition. Χρησιμοποιώντας επιχειρήματα αντίστοιχα με το ευθύ της απόδειξης του Λήμματος του Dirac (αυτό που ο West ονομάζει «Θεώρημα του Menger» είναι για μας το το Θεώρημα 6.1 των Σημειώσεων), προκύπτει εύκολα ότι σε ένα k-συνεκτικό γράφημα υπάρχει $\{v\}$-S βεντάλια με μέγεθος $\min\{k, |S|\}$.

Ορισμός 5.2 Γραμμικό γράφημα (line graph) *του* G *είναι το γράφημα* $\mathrm{L}(G) = (\mathrm{E}(G), J)$, *όπου* $J = \{\{e, f\} \mid e, f \in \mathrm{E}(G) \wedge (\exists u, v, w \in \mathrm{V}(G) : u \neq w \wedge e = \{u, v\} \wedge f = \{v, w\})\}$.



Σχήμα 5.3: Ένα παράδειγμα γραμμικού γραφήματος.

Παρατήρηση 5.4 *Ένα σύνολο* k *διακεκριμένων μονοπατιών στο* $\mathrm{L}(G)$ *αντιστοιχεί σε ένα σύνολο* k *ακμοδιακεκριμένων μονοπατιών στο* G.



Σχήμα 5.4: Δύο ακμοδιακεκριμένα μονοπάτια μήκους 3.