Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 6: 27.10.2016 | Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Αγγελική Χαντζηθάνου

6.1 Εφαρμογές Θεωρήματος Menger

Πόρισμα 6.1 *Έστω u, v δύο διακεκριμένες κορυφές ενός γραφήματος G.*

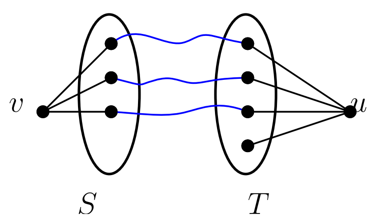
1. *Αν $\{u, v\} \notin E(G)$, τότε το ελάχιστο πλήθος κορυφών διάφορων από τις u, v, που τις διαχωρίζουν στο G είναι ίσο με το μέγιστο πλήθος εσωτερικά διακεκριμένων $u - v$ μονοπατιών στο G.*

2. *Το ελάχιστο πλήθος ακμών που διαχωρίζουν τις u, v στο G είναι ίσο με το μέγιστο πλήθος ακμοδιακεκριμένων μονοπατιών στο G.*

Απόδειξη:

1. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Menger με $S = N(v)$ και $T = N(u)$. Αν διαχωρίσουμε τα $N(v)$ και $N(u)$ έχουμε διαχωρίσει και τις κορυφές u, v, και αντιστρόφως.

2. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Menger στο γραμμικό γράφημα $L(G)$ με S να είναι το σύνολο των ακμών του G που προσπίπτουν στη v και T το σύνολο των ακμών του G που προσπίπτουν στη u.



Σχήμα 6.1: Απεικόνιση της απόδειξης του πρώτου μέρους του Πορίσματος 6.1.

$\blacksquare$

Θεώρημα 6.1 *(«Θεώρημα Menger», εκδοχή με κορυφές)*

1. *Ένα γράφημα G είναι κ-συνεκτικό αν και μόνο αν ανάμεσα σε οποιεσδήποτε δύο διακεκριμένες κορυφές υπάρχουν κ εσωτερικά διακεκριμένα μονοπάτια.*

2. *Ένα γράφημα G είναι κ-ακμοσυνεστικό αν και μόνο αν ανάμεσα σε οποιεσδήποτε δύο διακεκριμένες κορυφές υπάρχουν κ ακμοδιακεκριμένα μονοπάτια.*

Απόδειξη:

1. «⇐» Αν το G περιέχει κ εσωτερικά διακεκριμένα μονοπάτια ανάμεσα σε οποιεσδήποτε δύο κορυφές, τότε $|G| > \kappa$ και το G δεν μπορεί να διαχωριστεί με λιγότερες από κ κορυφές. Άρα, το G είναι κ-συνεκτικό.
   «⇒» Έστω ότι το G είναι κ-συνεκτικό (αρά ισχύει και ότι $|G| > \kappa$) και έστω ότι για κάποιες κορυφές $u, v \in V(G)$ δεν υπάρχουν κ εσωτερικά διακεκριμένα $u - v$ μονοπάτια. Από το Πόρισμα 6.1, η ακμή $\{u, v\} \in E(G)$. Ορίζουμε $G' = G \setminus \{u, v\}$. Ο G' περιέχει το πολύ $\kappa - 2$ εσωτερικά διακεκριμένα $u - v$ μονοπάτια. Από το Πόρισμα 6.1, στον G' υπάρχει $u - v$ διαχωριστής X με $|X| \leq \kappa - 2$ και αφού $|G| > \kappa$, υπάρχει $w \notin X \cup \{u, v\}$. Το X χωρίζει το w στο G' από τη u ή τη v ή και τις δύο γιατί το σύνολο $G' \setminus X$ έχει περισσότερες από δύο συνιστώσες και οι u, v είναι σε διαφορετικές συνιστώσες. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι ο X διαχωρίζει το w από το u στο G'. Τότε το $X \cup \{v\}$ χωρίζει το w από το u στο G. Άρα το $X \cup \{v\}$ είναι διαχωριστής στο G και $|X \cup \{v\}| \leq \kappa - 1$ άτοπο, γιατί το G είναι κ-συνεκτικό.

2. Άμεσο από το Πόρισμα 6.1.

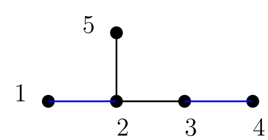
∎

6.2 Ταιριάσματα

Ορισμός 6.1 *Ένα σύνολο ακμών $M \subseteq E(G)$ ενός γραφήματος G καλείται* ταίριασμα αν $\forall e, e' \in M$, $e \cap e' = \varnothing$.

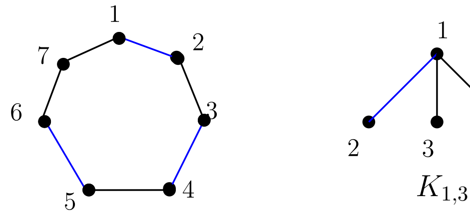
Θα λέμε ότι ένα ταίριασμα M *καλύπτει μια κορυφή $v \in V(G)$ αν η v είναι άκρο κάποιας ακμής του M.*
Ένα ταίριασμα καλείται τέλειο αν καλύπτει όλες τις κορυφές του γραφήματος G.
Συμβολίζουμε με $\nu(G)$ το μέγιστο πλήθος των ακμών σε ένα ταίριασμα του G.

Ένα παράδειγμα ταιριάσματος φαίνεται στο Σχήμα 6.2 όπου $M = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$. Δηλαδή, $|M| = 2$. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η κορυφή 2 καλύπτεται από το M ενώ η κορυφή 5 δεν καλύπτεται από το M.



Σχήμα 6.2: Παράδειγμα ταιριάσματος $M = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$.

Παρατηρήστε τα γραφήματα στο Σχήμα 6.3. Υπάρχει τέλειο ταίριασμα σε κύκλο περιττού μήκους; Όχι, αφού πάντα θα περισσεύει μια κορυφή. Το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε γράφημα G με περιττό πλήθος κορυφών, στο Σχήμα 6.2 βλέπουμε ότι περισσεύει η κορυφή 5.
Το άρτιο πλήθος κορυφών σε ένα γράφημα είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη για να υπάρχει τέλειο ταίριασμα. Για παράδειγμα, στο $K_{1,n}$ όπου το n είναι περιττός, το μέγιστο ταίριασμα είναι 1 ενώ οι κορυφές του είναι $n + 1$, δηλαδή άρτιος.

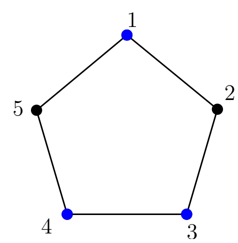


Σχήμα 6.3: Στον κύκλο μήκους 7 υπάρχει μέγιστο ταίριασμα $M = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}$ το οποίο δεν καλύπτει την κορυφή 7. Στο $K_{1,3}$ υπάρχει μέγιστο ταίριασμα $M = \{1,2\}$ που δεν καλύπτει τις κορυφές 3 και 4.

Ορισμός 6.2 *Ένα σύνολο κορυφών $T \subseteq V(G)$ ενός γραφήματος G καλείται* κάλυμα κορυφών (vertex cover) αν για κάθε ακμή $e \in E(G)$, $e \cap T \neq \varnothing$.

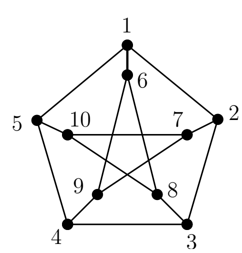
Συμβολίζουμε με $\tau(G)$ το ελάχιστο πλήθος κορυφών σε ένα κάλυμα κορυφών του G.

Ένα παράδειγμα καλύματος κορυφών φαίνεται στο Σχήμα 6.4. Για κύκλο μήκους 5 ισχύει ότι $\tau(C_5) = 3$.



Σχήμα 6.4: Παράδειγμα καλύματος κορυφών $T = \{1,3,4\}$.

Παράδειγμα 6.1 *Γράφημα του Petersen (σχήμα 6.5).*
Για το γράφημα του Petersen ισχύει ότι $\nu(P) = 5$. Το μέγιστο ταίριασμα $M = \{\{1,6\},\{2,7\},\{3,8\},\{4,9\},\{5,10\}\}$ έχει 5 ακμές.
Επίσης, ισχύει ότι $\tau(P) = 6$ αφού περιέχει δύο ξένους μεταξύ τους κύκλους μήκους 5, δηλαδή $\tau(P) \geq 6$ και επιπλέον υπάρχει κάλυμα κορυφών με 6 κορυφές. Το μέγιστο κάλυμα κορυφών $T = \{1,3,4,6,7,10\}$ έχει 6 κορυφές.



Σχήμα 6.5: Γράφημα του Petersen.

Πρόταση 6.1 *Για ένα γράφημα G ισχύει ότι*

$$\nu(G) \leq \tau(G) \leq 2\nu(G)$$

Απόδειξη: Έστω M μέγιστο ταίριασμα στο G. Κάθε κάλυμα κορυφών στο G πρέπει να περιέχει τουλάχιστον μια κορυφή από κάθε ακμή του M, άρα $\tau(G) \geq \nu(G)$.
Αφού το M είναι μέγιστο ταίριασμα κάθε ακμή $e \in E(G)$ τέμνει μια $e' \in M$, άρα οι $2\nu(G)$ κορυφές που καλύπτονται από το M αποτελούν κάλυμα κορυφών στο G. ∎

Πρόταση 6.2 *Έστω M μεγιστικό ταίριασμα ακμών σε ένα γράφημα G. Τότε, $\tau(G) \leq 2\nu(G)$.*

Θεώρημα 6.2 *(Hall) Ένα διμερές γράφημα $G = (V, E)$ με διαμέριση κορυφών $V = A \cup B$ περιέχει ένα ταίριασμα που καλύπτει το A αν και μόνο αν*

$$|N(S)| \geq |S| \quad \forall S \subseteq A \quad (\textit{συνθήκη του Hall})$$

όπου $N(S) := \bigcup_{v \in S} N(v)$.

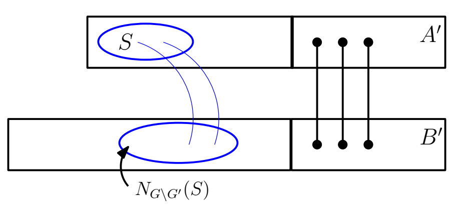
Απόδειξη: «$\Rightarrow$» Προφανής.
«$\Leftarrow$» Με επαγωγή στο $|A|$.

Βάση. Για $|A| = 1$, ισχύει.

Επαγωγικό Βήμα. Έστω $|A| \geq 2$ και υποθέτουμε ότι η συνθήκη του Hall είναι ικανή για να υπάρχει ταίριασμα που καλύπτει το A' για οποιοδήποτε $A' \subset A$.
Περίπτωση 1 Αν $|N_G(S)| \geq |S| + 1$ για κάθε μη κενό $S \subset A$, διαλέγουμε ακμή $\{a, b\} \in E(G)$ και εξετάζουμε το $G' := G[V \setminus \{a, b\}]$. Κάθε μη κενό $S \subseteq A \setminus \{a\}$ ικανοποιεί την

$$|N_{G'}(S)| \geq |N_G(S)| - 1 \geq |S|$$

Άρα από την Επαγωγική Υπόθεση στον G' υπάρχει ταίριασμα που καλύπτει το $A \setminus \{a\}$. Μαζί με την ακμή $\{a, b\}$, παίρνουμε ταίριασμα που καλύπτει το A στο G.
Περίπτωση 2 Έστω μη κενό $A' \subset A$ με $|B'| = |A'|$ για $B' = N(A')$. Από την Επαγωγική Υπόθεση, το $G' := G[A' \cup B']$ περιέχει ταίριασμα που καλύπτει το A'. Αλλά το $G \setminus G'$ επίσης ικανοποιεί τη συνθήκη του Hall γιατί $\forall S \subseteq A \setminus A'$ με $|N_{G \setminus G'}(S)| < |S|$ θα είχαμε $|N_G(S \cup A')| = |N_{G \setminus G'}(S)| + |B'| < |S| + |B'| = |S \cup A'|$, άτοπο.



Σχήμα 6.6: Το $G \backslash G'$ ικανοποιεί τη συνθήκη του Hall, στην Περίπτωση 2 της απόδειξης του Θεωρήματος 6.2.

Από την Επαγωγική Υπόθεση το $G \setminus G'$ περιέχει ταίριασμα που καλύπτει το $A \setminus A'$. Συνδυάζοντας τα δύο ταιριάσματα παίρνουμε ταίριασμα που καλύπτει το A στο G. ∎