Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 8: 3.11.2016 — Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Ιωσήφ Μουλίνος

8.1 Θεώρημα Tutte

Ορισμός 8.1 *Γράφημα G είναι* κορεσμένο μη παραγοντοποιήσιμο (saturated non-factorizable), *εάν δεν έχει τέλειο ταίριασμα, αλλά $\forall e \notin E(G)$, το γράφημα $G \cup e$ έχει τέλειο ταίριασμα. (Δηλαδή εάν G είναι γράφημα που δεν επιδέχεται τέλειο ταίριασμα, μεγιστικό ως προς τις ακμές.)*

Θεώρημα 8.1 (Tutte, 1947) *Γράφημα G έχει τέλειο ταίριασμα ανν*

$$q(G \setminus S) \leq |S|,\ \forall S \subseteq V(G),$$

όπου $q(G)$: ο αριθμός περιττών συνιστωσών του G.

Απόδειξη:
'$\Rightarrow$' Αν το G έχει τέλειο ταίριασμα είναι απευθείας άτοπη η παραβίαση της συνθήκης Tutte.
'$\Leftarrow$' Θα δείξουμε ότι αν ισχύει η συνθήκη του Tutte:

$$q(G \setminus S) \leq |S|,\ \forall S \subseteq V(G)$$

τότε στο G υπάρχει τέλειο ταίριασμα. Με αντιθετοαντιστροφή, θα δείξουμε ότι αν στον G δεν υπάρχει τέλειο ταίριασμα, τότε υπάρχει σύνολο $S \subseteq V(G)$ που παραβιάζει τη συνθήκη του Tutte, στο εξής και (T.C.).

Ισχυρισμός 8.1 *Χβτγ το $|G|$ είναι άρτιο.*

Απόδειξη: Αν $|G|$ περιττό, $S := \emptyset, |S| = 0 \Rightarrow q(G \setminus S) = q(G) \geq 1.$ ∎

Ισχυρισμός 8.2 *Χβτγ το G είναι μεγιστικό γράφημα (ως προς τις ακμές), χωρίς τέλειο ταίριασμα. Δηλαδή G κορεσμένο μη παραγοντοποιήσιμο (κ.μ.π.).*

Απόδειξη: Αν το G δεν είναι κ.μ.π. προσθέτουμε ακμές ώστε να γίνει. Έστω G' το γράφημα που προκύπτει. Οποιοδήποτε $S \subseteq V(G)$ παραβιάζει τη συνθήκη Tutte στο G', την παραβιάζει και στο G.

$$\text{αριθμός συνιστωσών } G \setminus S \geq \text{αριθμός συνιστωσών στο } G' \setminus S.$$

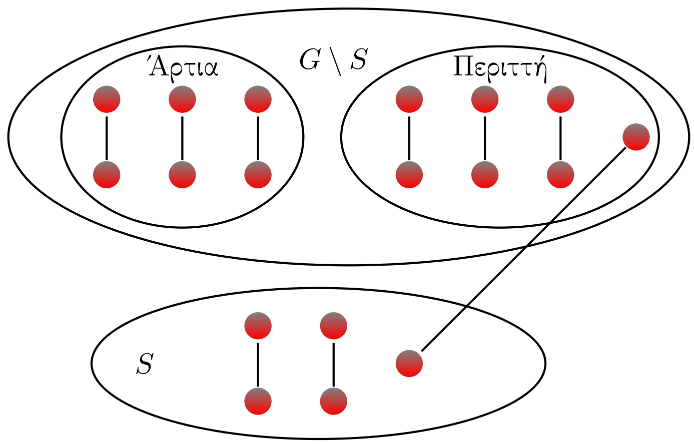
Μία περιττή συνιστώσα του $G' \setminus S$ είτε είναι περιττή και στον G, είτε είναι ένωση κάποιων συνιστωσών του G, τουλάχιστον μία εκ των οποίων είναι περιττή. Συνεπώς

$$q(G \setminus S) \geq q(G' \setminus S).$$

∎

Ισχυρισμός 8.3 *Σύνολο S παραβιάζει τη συνθήκη του Tutte στον G ανν [όλες οι συνιστώσες του $G \setminus S$ είναι κλίκες και κάθε $s \in S$ γειτονεύει με κάθε $v \in V(G) - \{s\}$ (*)].*

Απόδειξη: Αν S παραβιάζει την T.C. τότε η (*) ικανοποιείται από τη μεγιστικότητα του G ως προς τις ακμές. Αντίστροφα, έστω S που ικανοποιεί την (*), και έστω ότι ικανοποιεί τη συνθήκη Tutte.



Σχήμα 8.1: Για σύνολο S που ικανοποιεί την T.C. υπάρχει τέλειο ταίριασμα.

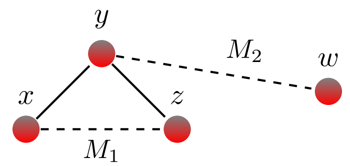
Τότε στις άρτιες συνιστώσες του $G \setminus S$ υπάρχει τετριμμένα τέλειο ταίριασμα. Στις περιττές συνιστώσες το τετριμμένο ταίριασμα εξαιρεί μια κορυφή η οποία συνδέεται με το S. Από τον Ισχυρισμό 8.1 ο $|G|$ είναι άρτιος. Ο αριθμός αταίριαστων κορυφών στο S είναι $|S| - q(G \setminus S)$ και είναι άρτιος. Άρα οι κορυφές του S που δεν ταιριάζονται με κορυφές του $V(G) \setminus S$, μπορούν να ταιριαστούν μεταξύ τους (βλ. Σχήμα 8.1). Συνεπώς το G έχει τέλειο ταίριασμα, άτοπο. Αρα το S δεν ικανοποιεί τη συνθήκη Tutte. ∎

Αρκεί να βρούμε σύνολο S που ικανοποιεί την (*). Έστω $S \subseteq V$, τ.ω. $\forall s \in S$, $\forall v \neq s$, $\{s, v\} \in E(G)$. Σημειώνεται ότι το S μπορεί να είναι κενό. Θα δείξουμε ότι αν οι συνιστώσες του $G \setminus S$ δεν είναι κλίκες, τότε υπάρχει τέλειο ταίριασμα στο G, άτοπο.
Υποθέτουμε ότι υπάρχουν 2 κορυφές στην ίδια συνιστώσα του $G \setminus S$ που δεν συνδέονται μεταξύ τους. Τότε σε ένα συντομότερο μονοπάτι από τη μια στην άλλη, θα υπάρχουν μη γειτονικές κορυφές x, z με κοινό γείτονα y.

Αφού $y \notin S$, $\exists w \in V(G)$ τ.ω. w δεν είναι γείτονας του y. Από τον Ισχυρισμό 8.2, υπάρχουν τέλεια ταιριάσματα M_1 στον $G \cup \{x, z\}$ και M_2 στον $G \cup \{y, w\}$ (βλ. Σχήμα 8.2).

$$H := (V(G), M_1 \oplus M_2)$$

όπου $M_1 \oplus M_2 = (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$, η συμμετρική διαφορά των M_1 και M_2. Παρατηρούμε ότι οι $\{x, z\}$ και $\{y, w\}$ είναι ακμές του H.

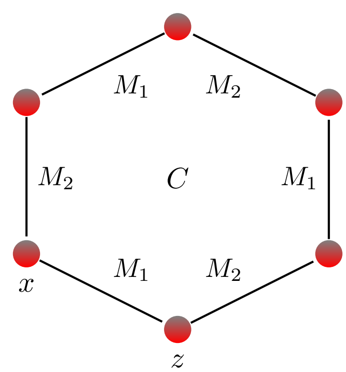


Σχήμα 8.2: Μη γειτονικές κορυφές x, z με κοινό γείτονα y. Οι διακεκομμένες $\{x, z\}$ και $\{y, w\}$ είναι ακμές που αν προστεθούν στο σχήμα, θα προκύψουν τα τέλεια ταιριάσματα M_1 και M_2, αντίστοιχα.

Παρατήρηση 8.1 *Στον H κάθε κορυφή έχει βαθμό 0 ή 2, δηλαδή το γράφημα H είναι ένωση ξένων κύκλων και απομονωμένων κορυφών. Οι κύκλοι αποτελούνται από εναλλασσόμενες ακμές του M_1 και του M_2.*

Ορίζουμε C να είναι κύκλος του H που περιέχει την $\{x, z\}$. Προφανώς $|C|$ άρτιο.

Περίπτωση 1: $\{y, w\} \notin C$ (βλ. Σχήμα 8.3).



Σχήμα 8.3: Κύκλος C του H.

Τότε $M := (M_2 \cap C) \cup (M_1 \setminus C) \subseteq E(G)$ είναι τέλειο ταίριασμα που δεν χρησιμοποιεί τη $\{x, z\}$ ούτε τη $\{y, w\}$, αλλά μόνο ακμές του G.

Οι λοιπές περιπτώσεις ελέγχονται στην επόμενη διάλεξη. ∎