Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 9: 9.11.2016 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

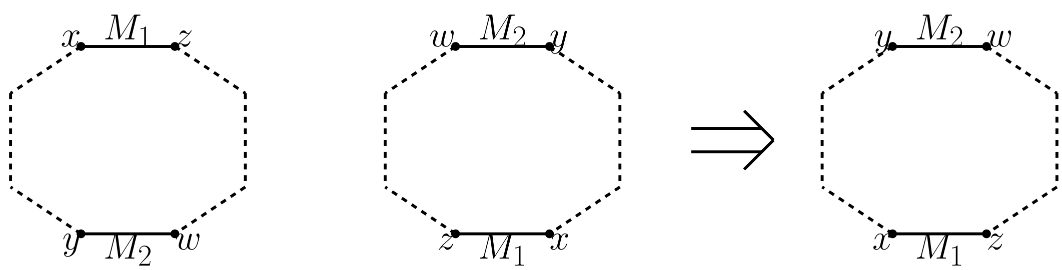
Γραφέας: Παναγιωτίδης Αλέξανδρος & Σ. Κ.

Θεώρημα 9.1 *Έστω γράφημα $G = (V, E)$, υπάρχει τέλειο ταίριασμα στο G αν και μόνο αν για κάθε S υποσύνολο του V ισχύει ότι $q(G \setminus S) \leq |S|$.*

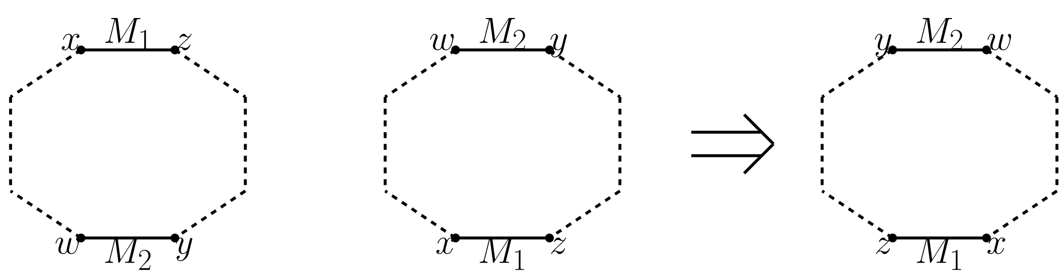
Απόδειξη: *(Συνέχιση Απόδειξης της ($\Leftarrow$) κατεύθυνσης)*

Έχουμε υποθέσει ότι το G δεν έχει τέλειο ταίριασμα και έχουμε δείξει ότι υπάρχει μονοπάτι μήκους 2 από το x στο z που διέρχεται από το y και κορυφή w τέτοια ώστε αν μία από τις ακμές (x, z) και (y, w) προστεθούν στο G θα υπάρχει τέλειο ταίριασμα στο νέο γράφημα. Ονομάζουμε M_1 και M_2 τα τέλεια ταιριάσματα που περιέχουν τις ακμές (x, z) και (y, w) αντίστοιχα, και H το γράφημα με κορυφές τις κορυφές του G και ακμές την συμμετρική διαφορά των M_1 και M_2, δηλαδή $H = (V, M_1 \triangle M_2)$. Τότε το γράφημα H αποτελείται από ένωση διακεκριμένων κύκλων άρτιου μήκους και απομονωμένων κορυφών. Έστω C κύκλος του H που περιέχει την (x, z) και θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις που το (y, w) ανήκει ή όχι στον κύκλο C. Η περίπτωση που το (y, w) δεν ανήκει στο C μελετήθηκε στην προηγούμενη διάλεξη και θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση που ανήκει.

Έχουμε λοιπόν ότι οι ακμές (y, w) και (x, z) ανήκουν στον C και θα εξετάσουμε τις πιθανές διατάξεις των κορυφών πάνω στον κύκλο. Υπάρχουν συνολικά 6 κυκλικές μεταθέσεις των τεσσάρων κορυφών, όπου ανά τρεις είναι ισοδύναμες, όπως μπορούμε να δούμε στα Σχήματα 9.1 και 9.2.



Σχήμα 9.1: Περίπτωση 1



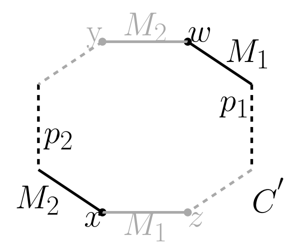
Σχήμα 9.2: Περίπτωση 2

Θα εξετάσουμε λοιπόν τις δύο πιθανές διατάξεις των κορυφών στον κύκλο και επιπλέον θα εξετάσουμε την κάθε περίπτωση με βάση το parity της απόστασης του y από το z μέσα στο C. Γνωρίζουμε ότι οι ακμές του C ανήκουν εναλλάξ στα M_1 και M_2.

1. Έστω ότι οι κορυφές εμφανίζονται στον κύκλο C, όπως στην Περίπτωση 1 (βλ. Σχήμα 9.1).

   (α΄) Θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου η απόσταση $dist_C(y, z)$ είναι περιττή.

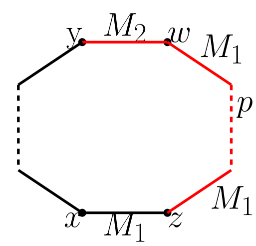
   Έστω το γράφημα C', όπου αφαιρέσαμε από το C τις κορυφές y και z, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.3. Παρατηρούμε ότι το C' είναι η ένωση δύο περιττών μονοπατιών P_1 και P_2 τα οποία ορίζονται ως τα μονοπάτια που έχουν το w και το x ως τερματικές κορυφές, αντίστοιχα. Συνεπώς οι τερματικές ακμές των μονοπατιών P_i ανήκουν στα ταιριάσματα M_i, για $i = 1, 2$, αφού οι ακμές του C' ανήκουν εναλλάξ στα ταιριάσματα M_1 και M_2. Χρησιμοποιώντας τις ακμές από το ταίριασμα M_1 στο μονοπάτι P_1, τις ακμές από το ταίριασμα M_2 στο μονοπάτι P_2 και την ακμή $\{y, z\}$, παίρνουμε ένα τέλειο ταίριασμα στο $V(C)$. Αν επιπλέον πάρουμε και τις ακμές από το $M_1 \setminus E(C)$ ή τις ακμές από το $M_2 \setminus E(G)$, τότε παίρνουμε ένα τέλειο ταίριασμα στο G.

   Σχήμα 9.3: Περιττά μονοπάτια

   (β΄) Θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου η απόσταση $dist_C(y, z)$ είναι άρτια.

   Έχουμε ότι το C είναι άρτιος κύκλος και ότι υπάρχει άρτιο μονοπάτι από το y στο z, τότε το συμπλήρωμα αυτού μονοπατιού στον C είναι επίσης άρτιο, δηλαδή το C είναι η ένωση δυο άρτιων μονοπατιών από το y στο z, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.4. Έστω P το μονοπάτι στο οποίο ανήκει η ακμή $\{y, w\}$, τότε υπάρχει κορυφή $u \in V(C) \setminus \{x, y, z, w\}$ τέτοια ώστε η ακμή $\{u, z\}$ ανήκει στο P. Έχουμε ότι οι ακμές στο μονοπάτι P ανήκουν εναλλάξ στα ταιριάσματα M_1 και M_2, η ακμή $\{y, w\}$ ανήκει στο M_2, το y και το z είναι τερματικές κορυφές του μονοπατιού και το μονοπάτι έχει άρτιο μήκος, συνεπώς η ακμή $\{u, z\}$ ανήκει στο ταίριασμα M_1. Τότε, η κορυφή z συνδέεται με δυο ακμές που ανήκουν στο M_1, το οποίο είναι άτοπο.

   Σχήμα 9.4: Άρτια μονοπάτια

2. Έστω ότι οι κορυφές εμφανίζονται στον κύκλο C, όπως στην Περίπτωση 2 (βλ. Σχήμα 9.2).

   (α΄) Αν η απόσταση $dist_C(y, z)$ είναι περιττή καταλήγουμε σε άτοπο όμοια με την παραπάνω Περίπτωση 1.(β΄).

   (β΄) Αν η απόσταση $dist_C(y, z)$ είναι άρτια, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε τέλειο ταίριασμα στο G όμοια με την παραπάνω Περίπτωση 1.(α΄). Η μόνη διαφοροποίηση είναι ότι αφαιρούμε τις κορυφές y και x αντί για τις κορυφές y και z και ανάλογα έχουμε τα περιττά μονοπάτια που ορίζονται από τις w και z τερματικές κορυφές.

■

Ορισμός 9.1 *Ένα γράφημα $G = (V, E)$ λέγεται k-κανονικό αν για κάθε $v \in V$ ο βαθμός του v είναι k, δηλαδή ισχύει $d(v) = k$ για κάθε $v \in V$.*

Πόρισμα 9.1 (Petersen, 1891) *Κάθε 3-κανονικό γράφημα G που δεν έχει γέφυρα έχει τέλειο ταίριασμα.*

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη του Tutte και τότε από το θεώρημα Tutte θα έπεται ότι υπάρχει τέλειο ταίριασμα. Έστω $S \subseteq V(G)$ και C περιττή συνιστώσα του $G \setminus S$, θα δείξουμε πρώτα ότι το πλήθος ακμών από το C στο S είναι περιττός και μεγαλύτερος του 3.

Για V' υποσύνολο του $V(G)$ και $v \in V'$, συμβολίζουμε ως $d_G(v)$ και $d_{V'}(v)$ το βαθμό της v στο γράφημα G και το βαθμό της v στο $G[V']$ αντίστοιχα. Έχουμε ότι το $\sum_{v \in C} d_G(v)$ είναι περιττός ως περιττό άθροισμα περιττών και ότι το $\sum_{v \in C} d_C(v)$ είναι άρτιος ως το διπλάσιο του πλήθους των ακμών του $G[C]$.

Συνεπώς, το $\sum_{v \in C} d_G(v) - \sum_{v \in C} d_C(v)$ είναι περιττό ως διαφορά περιττού από άρτιο. Εφόσον το C είναι συνεκτική συνιστώσα του $G \setminus S$, μπορεί να συνδεθεί μόνο με κορυφές του S, άρα αν υπάρχει μόνο μία ακμή το C στο S αυτή θα είναι γέφυρα του G. Συνεπώς το πλήθος ακμών από το C στο S είναι περιττό και μεγαλύτερο ή ίσο του 3.

Θεωρώντας όλες τις περιττές συνιστώσες του $G \setminus S$, καταλήγουμε ότι το πλήθος ακμών από το S στο $G \setminus S$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $3q(G \setminus S)$.

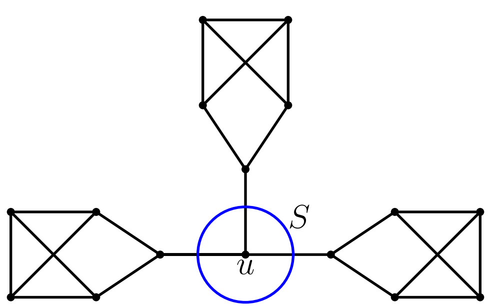
Επίσης έχουμε ότι το πλήθος ακμών από το S στο $G \setminus S$ είναι μικρότερο ή ίσο από το άθροισμα των βαθμών των κορυφών του S, δηλαδή το $\sum_{v \in S} d_G(v) = 3|S|$.

Συνδέοντας τις δύο σχέσεις καταλήγουμε ότι

$$q(G \setminus S) \leq |S|$$

άρα ισχύει η συνθήκη Tutte. ■

Θα μελετήσουμε το γράφημα του Tutte ως παράδειγμα, το οποίο είναι 3-κανονικό με γέφυρα, δηλαδή δεν εφαρμόζεται το θεώρημα του Petersen.



Σχήμα 9.5: Tutte Graph

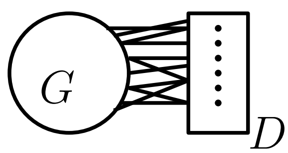
Έστω $S = \{u\}$ το μονοσύνολο του κεντρικού κόμβου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.5. Αν αφαιρέσουμε το S από το γράφημα, τότε θα υπάρχουν τρεις συνεκτικές συνιστώσες περιττού πλήθους, συνεπώς δεν ισχύει η συνθήκη του Tutte. Το μέγιστο ταίριασμα θα αφήνει δύο κορυφές ακάλυπτες, αφού σύμφωνα με την ορολογία του επόμενου θεωρήματος $d = 2$.

Θεώρημα 9.2 (Ελλειμματική εκδοχή του Θεωρήματος του Tutte, Berge 1958). *Το μέγιστο ταίριασμα σε ένα γράφημα $G = (V, E)$ με $|V| = n$ καλύπτει $n - \max_{S \subseteq V}(q(G \setminus S) - |S|)$ κορυφές.*

Απόδειξη: Ορίζουμε $d(S) = q(G \setminus S) - |S|$ και $d = \max_{S \subseteq V} d(S)$. Για $S = \emptyset$ έχουμε $q(G) \geq 0$ και άρα $d \geq 0$.

Θα δείξουμε πρώτα ότι κάθε ταίριασμα μπορεί να καλύψει το πολύ $n - d$ κορυφές. Έστω S υποσύνολο του V και C_S οι συνεκτικές συνιστώσες του $G \setminus S$ με περιττή τάξη. Για κάθε συνιστώσα C στο C_S υπάρχει μια κορυφή $v \in C$ η οποία δεν μπορεί να συνδεθεί εσωτερικά στο C σε οποιοδήποτε ταίριασμα, αφού η τάξη του C είναι περιττή. Η κορυφή v θα πρέπει να συνδεθεί με κάποια κορυφή του S, αφού το C είναι συνεκτική συνιστώσα του $G \setminus S$. Άρα σε οποιοδήποτε ταίριασμα θα έχουμε $|C_S|$ το πλήθος κορυφές, οι οποίες θα πρέπει να συνδεθούν με κορυφές του S, συνεπώς έχουμε το ζητούμενο.

Θα βρούμε τώρα ταίριασμα που μπορεί να καλύψει $n - d$ κορυφές. Ορίζουμε γράφημα G' με $V(G') = G \cup D$, όπου D σύνολο d νέων κορυφών όπου η κάθε μία συνδέεται με ακμή με όλες τις κορυφές του V.



Σχήμα 9.6: Γράφημα G' από την απόδειξη του Θεωρήματος 9.2

Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $S \subseteq V$, το $d(S)$ έχει το ίδιο parity με το $|G|$. Πράγματι, έστω ότι το $|G|$ και το $q(G \setminus S)$ είναι άρτιοι, τότε το $|G \setminus S|$ είναι άρτιο και άρα το $|S|$ είναι άρτιο. Συνεπώς το $d(S) = q(G \setminus S) - |S|$ είναι άρτιος. Ομοίως αποδεικνύεται ο ισχυρισμός και στις άλλες περιπτώσεις.

Συνεπώς το $|D|$ έχει το ίδιο parity με το $|G|$, άρα $|G'|$ άρτιος.

Θα δείξουμε ότι το G' ικανοποιεί τη συνθήκη του Tutte, συνεπώς από το Θεώρημα του Tutte θα υπάρχει τέλειο ταίριασμα M' στο G'. Αφαιρώντας τις ακμές που προσπίπτουν στο D από το M', το προκύπτον σύνολο M θα είναι ταίριασμα στο G που καλύπτει τουλάχιστον $n - d$ κορυφές.

Έστω S' είναι υποσύνολο του $V \cup D$. Θα θεωρήσουμε τις εξής περιπτώσεις

1. Υποθέτουμε ότι το S' είναι το κενό σύνολο. Τότε το $q(G' \setminus S') = q(G') = 0$, αφού το $|G'|$ είναι άρτιο όπως είδαμε. Συνεπώς ισχύει $q(G' \setminus S') = |S'| = 0$.

2. Υποθέτουμε ότι $S' \neq \emptyset$ και $D \setminus S' \neq \emptyset$. Τότε το $G' \setminus S'$ είναι συνεκτικό αφού υπάρχει $v \in D \setminus S' \subseteq V(G' \setminus S')$ η οποία συνδέεται με όλες τις κορυφές του $G' \setminus S'$. Άρα ισχύει

$$q(G' \setminus S') \leq 1 \leq |S'|.$$

3. Υποθέτουμε ότι $D \subseteq S'$. Ορίζουμε το $S = S' \setminus D \subseteq V(G)$ και εφόσον $V(G') = V(G) \cup D$ έχουμε ότι $G' \setminus S' = G \setminus S$. Άρα ισχύει

$$q(G' \setminus S') = q(G \setminus S) \leq |S| + d = |S'|.$$

Συνεπώς για κάθε $S' \subseteq V(G')$ ισχύει $q(G' \setminus S') \leq |S'|$ και άρα ισχύει η συνθήκη του Tutte στο G'. ∎