Θεωρία Γραφημάτων

Διάλεξη 1: 12.10.2016 — Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Σ. Κ.

1.1 Εισαγωγικοί ορισμοί

Ορισμός 1.1 Γράφημα G *καλείται ένα ζεύγος* $G = (V, E)$ *όπου* V *είναι το σύνολο των* κορυφών *(ή κόμβων) και* E *πολυσύνολο που αποτελείται από μη διατεταγμένα ζεύγη κορυφών. Τα στοιχεία του* E *καλούνται* ακμές.

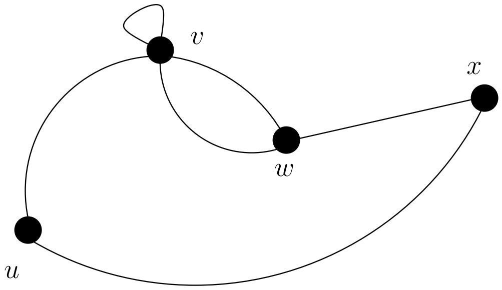
Για γράφημα G, $V(G)$ και $E(G)$ δηλώνουν τα σύνολα κορυφών και ακμών αντίστοιχα. Συνήθως χρησιμοποιούμε n και m για τις ποσότητες $|V(G)|$ και $|E(G)|$. Ο αριθμός των κορυφών καλείται επίσης *τάξη* του G και εναλλακτικά συμβολίζεται ως $|G|$.

Ο ορισμός που δώσαμε αντιστοιχεί στα *μη κατευθυνόμενα* γραφήματα. Αν τα ζεύγη στο E είναι διατεταγμένα, το γράφημα καλείται *κατευθυνόμενο.* Στο εξής όταν αναφερόμαστε απλά σε «γράφημα» εννοούμε μη κατευθυνόμενο.

Βρόχος καλείται μια ακμή της μορφής $\{v, v\}$, $v \in V$. *Πολλαπλή ακμή* είναι μια ακμή που εμφανίζεται πολλές φορές στο πολυσύνολο E. Εάν το E είναι σύνολο και δεν περιέχει βρόχους, έχουμε ένα απλό γράφημα.

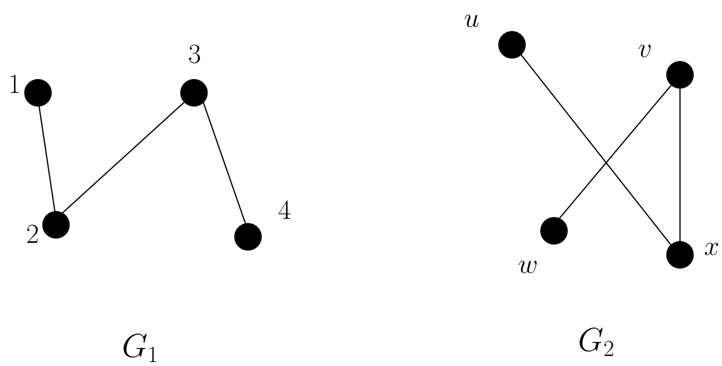
Ορισμός 1.2 Το $G = (V, E)$ *καλείται* απλό *γράφημα αν το* E *δεν περιέχει βρόχους ή πολλαπλές ακμές.*

Στο εξής όταν αναφερόμαστε σε γράφημα που δεν είναι απλό, θα το δηλώνουμε ρητά. Στο Σχήμα 1.1 δίνεται ένα παράδειγμα μη απλού γραφήματος.



Σχήμα 1.1: (Μη απλό) γράφημα $G = (V, E)$ με $|E(G)| = 6$.

Οι κορυφές u, v είναι τα *άκρα* της ακμής $\{u, v\}$. Δύο κορυφές u, v καλούνται *γειτονικές* στο γράφημα G αν $\{u, v\} \in E(G)$· τότε ο u είναι *γείτονας* του v. Η ακμή $e \in E(G)$ *προσπίπτει* στην $v \in V(G)$ αν $v \in e$. Η ακμή e *προσπίπτει στην ακμή* e' αν $e \cap e' \neq \varnothing$.

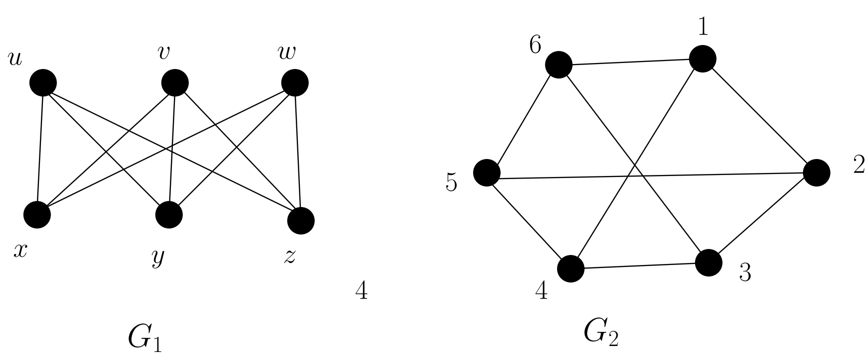


Σχήμα 1.2: Δύο ισόμορφα γραφήματα.

Εξετάστε τα γραφήματα G_1, G_2 στο Σχήμα 1.2. Είναι τα ίδια; Όχι! Είναι όμως ισόμορφα.

Ορισμός 1.3 *Έστω γραφήματα $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$.* Ισομορφισμός *καλείται μια 1-1 και επί συνάρτηση $\phi : V_1 \to V_2$ τ.ω. $\{u, v\} \in E_1$ αν και μόνο αν $\{\phi(u), \phi(v)\} \in E_2$. Αν υπάρχει ισομορφισμός, τα G_1, G_2 καλούνται* ισόμορφα *(ή* ισομορφικά*).*

Ένα άλλο παράδειγμα ισόμορφων γραφημάτων δίνεται στο Σχήμα 1.3.



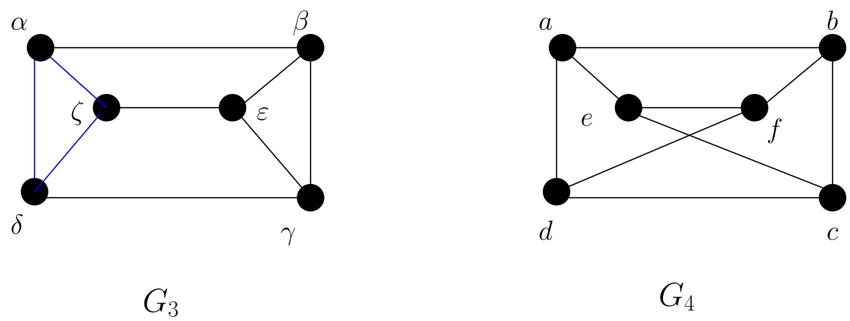
Σχήμα 1.3: Δύο ισόμορφα γραφήματα.

Ορισμός 1.4 *Το συμπλήρωμα του γραφήματος G είναι το γράφημα $\overline{G} = (V(G), \overline{E(G)})$ όπου $e \in \overline{E(G)}$ αν και μόνο αν $e \in E(G)$.*

Άσκηση 1.1 *Τα G και H είναι ισόμορφα αν και μόνο αν $\overline{G}$ και $\overline{H}$ ισόμορφα.*

Ορισμός 1.5 *Έστω $r \geq 2$, ακέραιος. $G = (V, E)$ καλείται r-μερής (r-partite) αν υπάρχει διαμέριση του V σε r κλάσεις και κάθε ακμή του E έχει τα άκρα της σε διαφορετικές κλάσεις.*

Εξετάστε τα γραφήματα G_1, G_2 από το Σχήμα 1.3 και τα G_3, G_4 από το Σχήμα 1.4. Ποια από αυτά είναι ισόμορφα μεταξύ τους;



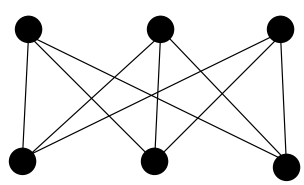
Σχήμα 1.4: Είναι τα G_3, G_4 ισόμορφα;

Παρατήρηση 1.1 *Ο ισομορφισμός είναι σχέση ισοδυναμίας.*

1. *Το G είναι ισόμορφο με τον εαυτό του.*
2. *Αν το G_1 είναι ισόμορφο με το G_2, τότε το G_2 είναι ισόμορφο με το G_1.*
3. *Αν το G_1 είναι ισόμορφο με το G_2 και το G_2 ισόμορφο με το G_3, τότε το G_1 είναι ισόμορφο με το G_3.*

Ορισμός 1.6 Γράφημα χωρίς ετικέτες (unlabelled graph) *καλείται μία κλάση ισοδυναμίας ισόμορφων γραφημάτων.*

Στο Σχήμα 1.5 δίνεται ένα παράδειγμα απεικόνισης ενός γραφήματος χωρίς ετικέτες. Αναπαριστά την κλάση ισοδυναμίας στην οποία ανήκουν τα G_1, G_2 του Σχήματος 1.3.



Σχήμα 1.5: Γράφημα χωρίς ετικέτες.

1.2 Υπογραφήματα, Μονοπάτια, Συνεκτικότητα

Δοθέντων $G = (V, E)$ και $v \in V$, *γειτονιά* του v είναι το σύνολο των γειτόνων του v, το οποίο συμβολίζουμε με $N(v)$. *Βαθμός* του v είναι ο αριθμός $|N(v)|$ και τον συμβολίζουμε με $d(v)$ ή με $d_G(v)$ αν χρειάζεται να ξεκαθαρίσουμε σε ποιο γράφημα μετράμε το βαθμό.

Πρόταση 1.1 *Σε ένα γράφημα $G = (V, E)$ $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.*

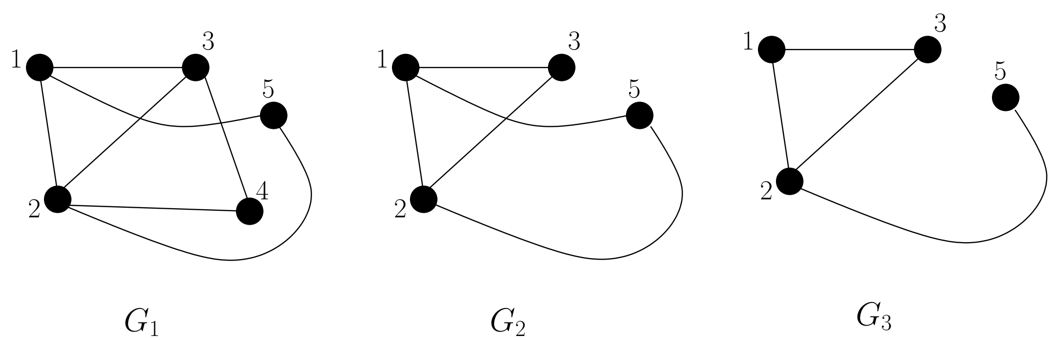
Απόδειξη: Στο άθροισμα κάθε ακμή μετριέται δύο φορές. ∎

Ορισμός 1.7 *Το γράφημα $H = (U, F)$ καλείται* υπογράφημα *του $G = (V, E)$ αν $U \subseteq V$ και $F \subseteq E$. Αν $U = V$, τότε το H λέγεται* επικαλύπτον υπογράφημα (spanning subgraph) *του $G = (V, E)$.*

Διαισθητικά για να πάρουμε ένα υπογράφημα του $G = (V, E)$, σβήνουμε κάποιες κορυφές και κάποιες ακμές. Τα εναγόμενα υπογραφήματα καθορίζονται μόνο από το σύνολο των κορυφών τους.

Ορισμός 1.8 *Δοθέντων $G = (V, E)$ και $\varnothing \neq U \subseteq V$, με $G[U]$ συμβολίζουμε το γράφημα με σύνολο κορυφών U και σύνολο ακμών $E(G[U]) = \{e \in E \mid e \subseteq U\}$. Το $G[U]$ καλείται* υπογράφημα του $G = (V, E)$ που ενάγεται από το U *ή πιο απλά* εναγόμενο υπογράφημα (induced subgraph) *του $G = (V, E)$.*

Στο Σχήμα 1.6 δίνονται παραδείγματα των Ορισμών, 1.7,1.8. Θα χρησιμοποιούμε τη συντομογραφία $G - X$ για να συμβολίσουμε το γράφημα $G[V \setminus X]$, $X \subseteq V$. Ομοίως για $F \subseteq E$, με $G - F$ συμβολίζουμε το γράφημα $G = (V, E \setminus F)$. Αν τα X και F είναι μονοσύνολα, απλά γράφουμε $G - v$ και $G - e$ αντίστοιχα.



Σχήμα 1.6: Το G_2 είναι εναγόμενο υπογράφημα του G_1. Το G_3 είναι υπογράφημα του G_1 και του G_2 αλλά δεν είναι εναγόμενο υπογράφημα.

Κάποιες σημαντικές ειδικές κατηγορίες γραφημάτων είναι οι παρακάτω. K_n: πλήρες γράφημα (κλίκα) με n κορυφές. $K_{n,m}$: πλήρες διμερές γράφημα με n κορυφές στο ένα σύνολο της διαμέρισης και m στο άλλο. *Κενό γράφημα:* το $(\varnothing, \varnothing)$.

Ορισμός 1.9 Μονοπάτι (path) *καλείται το μη κενό γράφημα $P = (V, E)$ όπου $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}\}$ $E = \{\{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_k, x_{k+1}\}\}$, $k \geq 0$, όπου $|E(P)| = k$ είναι το* μήκος *του μονοπατιού.*

Αν $P = (V, E)$ είναι ένα μονοπάτι μήκους $k \geq 2$, το γράφημα $C = (V, E \cup \{x_{k+1}, x_1\})$ καλείται *κύκλος (cycle)* μήκους $k + 1$. Όταν αναφερόμαστε σε ένα μονοπάτι ή κύκλο στο G εννοούμε ένα υπογράφημα του G που είναι μονοπάτι ή κύκλος αντίστοιχα.

Ορισμός 1.10 Περίπατος (walk) *μήκους $k \geq 1$ στο G καλείται μια μη κενή εναλλασσόμενη ακολουθία κορυφών-ακμών του $G = (V, E)$*

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1}$$

τ.ω. $v_i \in V$, $i = 1, \ldots, k + 1$ και $e_i \in E$ με $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$, $i = 1, \ldots, k$.

Παρατηρήστε ότι σε έναν περίπατο μπορεί να υπάρχουν επαναλήψεις κορυφών ή ακόμα και ακμών. Αν $v_1 = v_{k+1}$ ο περίπατος ονομάζεται *κλειστός*.

Άσκηση 1.2 *Κάθε περίπατος από το u στο v στο G περιέχει ένα μονοπάτι από το u στο v.*

Ορισμός 1.11 *Ένα μη κενό γράφημα $G = (V, E)$ καλείται* συνεκτικό *αν για κάθε $x, y \in V$, τα x και y ενώνονται με μονοπάτι στο G.*

Ένα μεγιστικό συνεκτικό υπογράφημα του G καλείται *συνεκτική συνιστώσα* του G, ή απλά *συνιστώσα* του G.

Πρόταση 1.2 *Γράφημα G με n κορυφές και m ακμές έχει τουλάχιστον $n-m$ συνεκτικές συνιστώσες.*

Απόδειξη: Ξεκίνησε με το γράφημα $\overline{K_n}$ (που έχει n συνιστώσες) και πρόσθεσε μία-μία τις m ακμές του $E(G)$. Κάθε ακμή που προσθέτεις μειώνει τον αριθμό των συνιστωσών το πολύ κατά ένα. ∎

1.3 Δέντρα

Ορισμός 1.12 *Ένα γράφημα χωρίς κύκλους ονομάζεται* ακυκλικό *ή* δάσος. Δέντρο *είναι ένα συνεκτικό ακυκλικό γράφημα.*

Φύλλο σε ένα δέντρο είναι μια κορυφή βαθμού 1.

Λήμμα 1.1 *Ένα δέντρο T με $n \geq 2$ κορυφές περιέχει τουλάχιστον δύο φύλλα.*

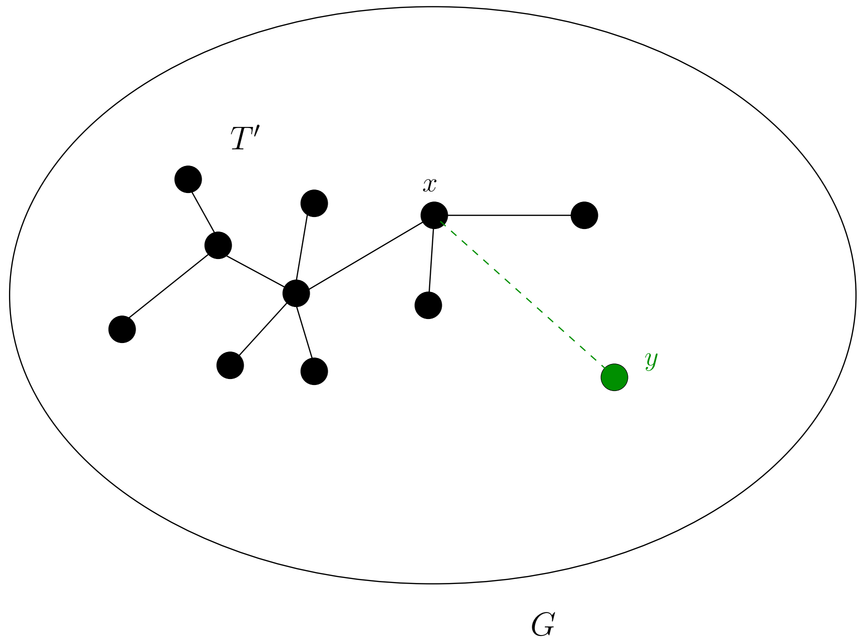
Απόδειξη: Κάθε συνεκτικό γράφημα με τουλάχιστον δύο κορυφές περιέχει τουλάχιστον μία ακμή, άρα και τουλάχιστον ένα μονοπάτι. Πάρε ένα μεγιστικό μονοπάτι P, τα άκρα του x, y δεν έχουν άλλο γείτονα στο T εκτός από τους γείτονες τους στο P. Άρα τα x, y είναι φύλλα. ∎

Θεώρημα 1.1 *Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες για ένα γράφημα T με n κορυφές.*

1. *Το T είναι δέντρο.*
2. *Οποιεσδήποτε δύο κορυφές του T ενώνονται με μοναδικό μονοπάτι.*
3. *Το T είναι συνεκτικό και έχει $n-1$ ακμές.*
4. *Το T είναι ακυκλικό και έχει $n-1$ ακμές.*

Απόδειξη: Άσκηση. ∎

Συμβολίζουμε με $\delta(G)$ τον ελάχιστο βαθμό, δηλαδή την ποσότητα $\min_{v \in V(G)} d_G(v)$.



Σχήμα 1.7: Απεικόνιση της απόδειξης του Θεωρήματος 1.2.

Θεώρημα 1.2 *Αν T δέντρο με $k \geq 0$ ακμές και G γράφημα με $\delta(G) \geq k$, τότε το T είναι ισόμορφο με υπογράφημα του G.*

Απόδειξη: Με επαγωγή στο k.

Βάση. Έστω $k = 0$. Κάθε γράφημα περιέχει ως υπογράφημα το K_1 που είναι το μόνο δέντρο με μηδέν ακμές.

Επαγωγικό Βήμα. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για διέντρα με λιγότερες από k ακμές. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για T με $k > 0$ ακμές. Από το Λήμμα 1.1, το T περιέχει φύλλο v. Έστω u ο μοναδικός γείτονας του v στο T. Ορίζουμε $T' := T - v$. Από την Επαγωγική Υπόθεση το G περιέχει το T' ως υπογράφημα, αφού $\delta(G) \geq k > k - 1 = |E(T')|$. Έστω x η κορυφή στο αντίγραφο του T' εντός του G η οποία αντιστοιχεί στο u. Δείτε το Σχήμα 1.7. Επειδή το T' έχει $k - 1$ κορυφές διάφορες του u και $d_G(x) \geq k$, το x έχει κάποιο γείτονα y στο G που δεν περιέχεται στο αντίγραφο του T'. Προσθέτοντας την ακμή $\{x, y\}$ παίρνουμε ένα αντίγραφο του T στο G με το y να παίζει το ρόλο του v. ∎

Η ανισότητα στο Θεώρημα 1.2 είναι η καλύτερη δυνατή αφού το K_k δεν περιέχει δέντρο με k ακμές.