Πανεπιστημιο Αθηνων, Μαθηματικα Πληροφορικης
Πρωτο σετ ασκησεων, εαρινο εξαμηνο 2016-17
Δημοσιευση: 06.04.2017, Παραδοση: μεχρι την εναρξη του μαθηματος 25.04.2017

Η ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΚΑΙ Η ΩΡΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΕΣ.
Μπορείτε να δουλέψετε ατομικά ή σε ομάδες των δύο. Οι ασκήσεις παραδίδονται σε έντυπη μορφή.

Πρόβλημα 0 [4 μονάδες].
Δείξτε ότι για $n \geq 1$, $\gcd(F_n, F_{n-1}) = 1$. Δηλαδή οι διαδοχικοί αριθμοί Fibonacci είναι σχετικά πρώτοι.

Πρόβλημα 1 [6 μονάδες].
Έστω S ένα υποσύνολο των σημείων του επιπέδου. Ορίζουμε την την πρόταση $P(S, k)$: «μπορούμε να χρωματίσουμε τα σημεία του S χρησιμοποιώντας k χρώματα ώστε να μην υπάρχουν δύο σημεία του S τα οποία έχουν το ίδιο χρώμα και απέχουν 1 μεταξύ τους».
(α) Δείξτε ότι ισχύει η $P(\mathbb{Z}^2, 2)$. (β) Διατυπώστε την άρνηση της $P(S, k)$. Δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε λέξεις όπως «δεν», «μη», και εκφράσεις του στυλ «είναι αδύνατο».

Υπενθυμίζουμε ότι στην τάξη δείξαμε την $\neg P(\mathbb{R}^2, 3)$.

Πρόβλημα 2 [4 μονάδες].
Δίνεται περιττός φυσικός αριθμός m. Να δειχθεί ότι υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος ώστε ο m διαιρεί το $2^n - 1$.

Πρόβλημα 3 [2 μονάδες].
Να δειχθεί ότι οποιοιδήποτε δύο διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι είναι σχετικά πρώτοι.

Πρόβλημα 4 [4 μονάδες].
Τοποθετούμε 41 πιόνια πάνω σε μια σκακιέρα 10×10. Να δειχθεί ότι θα υπάρχουν 5 πιόνια που ανά δύο δεν βρίσκονται ούτε στην ίδια σειρά ούτε στην ίδια στήλη της σκακιέρας.

Πρόβλημα 5 [6 μονάδες].
Δίνεται ένα σύνολο $n + 1$ διακεκριμένων θετικών ακέραιων, όλοι μικρότεροι ή ίσοι του $2n$.
(α) Να δειχθεί ότι δύο από τους ακέραιους θα είναι σχετικά πρώτοι. (β) Να δειχθεί ότι υπάρχουν δύο ακέραιοι ώστε ο ένας να είναι διαιρέτης του άλλου.

Πρόβλημα 6 [3 μονάδες]. Δείξτε ότι $R(4, 4) > 10$. Ένα σκέτο σχήμα δεν αρκεί, χρειάζεται να εξηγήσετε τί συμβαίνει στο σχήμα.

Πρόβλημα 7 [4 μονάδες]. Έχουμε ένα σύνολο από 17 φοιτητές. Όλοι οι φοιτητές συνομίλησαν ανά δύο μεταξύ τους. Κάθε συνομιλία μεταξύ δύο φοιτητών αφορά ένα από τρία θέματα: Θεωρία Γραφημάτων, Θεωρία Ramsey, Υπολογιστική Πολυπλοκότητα. Δείξτε ότι τρεις φοιτητές συνομίλησαν για το ίδιο θέμα. *Ισοδύναμα:* χρωματίζουμε τις ακμές του K_{17} χρησιμοποιώντας τρία χρώματα· να δειχθεί ότι υπάρχει μονοχρωματικό τρίγωνο.