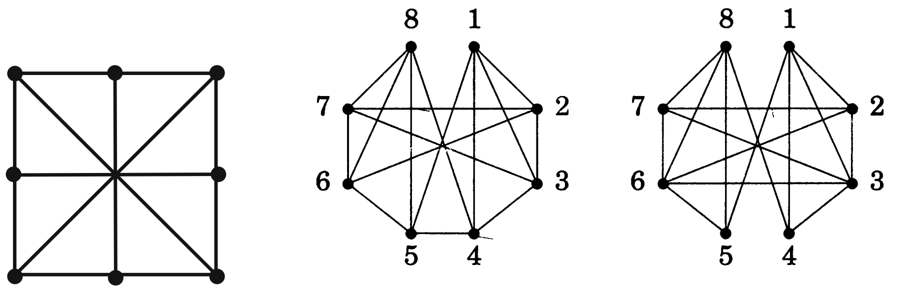
Πανεπιστημιο Αθηνων, Μαθηματικα Πληροφορικησ
Δευτερο σετ ασκησεων, εαρινο εξαμηνο 2016-17
Δημοσιευση: 09.05.2017, Παραδοση: μεχρι την εναρξη του μαθηματοσ 18.05.2017

Η ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΚΑΙ Η ΩΡΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΕΣ.
Μπορείτε να δουλέψετε ατομικά ή σε ομάδες των δύο. Οι ασκήσεις παραδίδονται σε έντυπη μορφή.

Πρόβλημα 1 [4 μονάδες]. Δοθέντος γραφήματος $G = (V, E)$, το *συμπλήρωμα* του ορίζεται ως το απλό γράφημα $\overline{G} = (V, E')$ όπου $E' = \{\{x, y\} \mid x, y \in V, \{x, y\} \notin E\}$. Δείξτε ότι αν το G είναι μη συνεκτικό, τότε το $\overline{G}$ είναι συνεκτικό.

Πρόβλημα 2 [6 μονάδες]. Είναι τα παρακάτω τρία γραφήματα επίπεδα; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας, επεξηγώντας τες με τα αναγκαία σχήματα.



Πρόβλημα 3 [4 μονάδες].
Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Hall που αποδείξαμε στην τάξη, δείξτε ότι ένα διμερές γράφημα $G = (V, E)$ έχει τέλειο ταίριασμα αν και μόνο αν

$$\forall S \subseteq V, \ \ |S| \leq |\Gamma(S)|. \tag{1}$$

Δώστε παράδειγμα γραφήματος που ικανοποιεί την (1) αλλά δεν έχει τέλειο ταίριασμα.

Πρόβλημα 4 [2 μονάδες].
Αποδείξτε ότι το διατεταγμένο σύνολο $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, |)$ έχει άπειρα ελαχιστικά στοιχεία.

Πρόβλημα 5 [3 μονάδες].
Για $x, y \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $x \sim y$ αν $x - y \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Πρόβλημα 6 [4 μονάδες].
Φιξάρουμε ένα πεπερασμένο σύνολο U και ορίζουμε το σύνολο $\mathcal{P}$ όλων των διαμερίσεων του U. Για $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ λέμε ότι η P_1 είναι *εκλέπτυνση* της P_2 αν για κάθε $A \in P_1$, υπάρχει $A' \in P_2$ τ. ώ. $A \subseteq A'$. Π.χ., αν $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, η $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$ είναι εκλέπτυνση της $\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$.
(α) Δείξτε ότι η σχέση της εκλέπτυνσης ορίζει μερική διάταξη στο $\mathcal{P}$.
(β) Σχεδιάστε το διάγραμμα Hasse αν $U = \{1, 2, 3\}$.