Μαθηματικά Πληροφορικής

3ο Μάθημα

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Δομική επαγωγή

- Η ιδέα της μαθηματικής επαγωγής μπορεί να επεκταθεί και σε άλλες δομές εκτός από το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών.
- Μπορούμε να μιμηθούμε τον επαγωγικό ορισμό του συνόλου των φυσικών για να ορίσουμε επαγωγικά νέες δομές.
- Σε αυτές τις δομές μπορούμε να κάνουμε επαγωγή για να αποδείξουμε ιδιότητες.

Παράδειγμα επαγωγικού ορισμού

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Ορίζουμε ένα σύνολο S ως εξής:
  Βάση του ορισμού: $3 \in S$
  Επαγωγικό βήμα: Αν $x, y \in S$ τότε και $x + y \in S$
- $S = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \ldots\}$
- Ποιο είναι το σύνολο S;
- Διαισθητικά, το S περιέχει τα πολλαπλάσια του 3. Πώς το αποδεικνύουμε;

Παράδειγμα επαγωγικού ορισμού (συνέχ.)

- Έστω A το σύνολο των πολλαπλασίων του 3, που ορίζεται περιγραφικά:
$$A = \{3n \, : \, n \in \mathbb{N}\}.$$
- Θέλουμε να δείξουμε ότι τα δυο σύνολα είναι ίσα, $A = S$.
  - $A \subseteq S$, δηλαδή ότι κάθε θετικό πολλαπλάσιο του 3 ανήκει στο S. Θα το κάνουμε με μαθηματική επαγωγή.
  - $S \subseteq A$, δηλαδή ότι κάθε αριθμός που παράγεται με τους παραπάνω κανόνες, είναι πολλαπλάσιο του 3. Θα το κάνουμε με δομική επαγωγή.

Απόδειξη του $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{S}$

Απόδειξη.

- Θα δείξουμε με μαθηματική επαγωγή ότι για κάθε n ισχύει ότι $3n \in S$.
- Βάση της επαγωγής: Επιβεβαιώνουμε ότι $3 \in S$ από τη βάση του ορισμού του συνόλου S.
- Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι $3n \in S$. Θα δείξουμε ότι $3(n+1) \in S$.
  - Παρατηρούμε ότι $3 \in S$, και $3n \in S$.
  - Άρα $3 + 3n \in S$.

$\square$

Απόδειξη του $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{A}$

Δομική Επαγωγή.

- Θα δείξουμε ότι και οι δύο κανόνες που παράγουν στοιχεία του S παράγουν πολλαπλάσια του 3.
- Βάση δομικής επαγωγής: Η βάση του ορισμού παράγει μόνο ένα στοιχείο, το 3, που είναι πολλαπλάσιο του 3.
- Επαγωγικό βήμα: Αν $x, y \in S$ με x, y πολλαπλάσια του 3, αρκεί να δείξουμε ότι $x + y$ είναι επίσης πολλαπλάσιο του 3. Αυτό όμως είναι προφανές.

$\square$

Δομική επαγωγή

Ορισμός (Δομική επαγωγή)

Έστω σύνολο ή δομή Δ που ορίζεται επαγωγικά. Για να αποδείξουμε μια ιδιότητα P για κάθε στοιχείο του συνόλου Δ αρκεί να ακολουθήσουμε τα επόμενα βήματα:

- Βάση της επαγωγής: Αποδεικνύουμε ότι τα στοιχεία του συνόλου Δ που ορίζονται στο βήμα *Βάση του ορισμού* του έχουν την ιδιότητα.
- Επαγωγικό βήμα: Θεωρούμε ότι σε κάποιο βήμα της κατασκευής του Δ, τα στοιχεία του έχουν την ιδιότητα. Αποδεικνύουμε ότι αν τα στοιχεία του Δ έχουν την ιδιότητα P, τότε και τα νέα στοιχεία που ορίζονται στο *επαγωγικό βήμα* του ορισμού του Δ έχουν την ιδιότητα.

Αλφάβητο

Ορισμός

Αλφάβητο είναι ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο σύνολο. Τα στοιχεία του καλούνται σύμβολα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Παραδείγματα)

- $G = \{\alpha, \beta, \ldots, \omega\}$
- $D = \{0, 1, \ldots, 9\}$

Συμβολοσειρές

Ορισμός

Οι πεπερασμένες ακολουθίες συμβόλων ενός αλφαβήτου λέγονται συμβολοσειρές. Το σύνολο όλων των συμβολοσειρών ενός αλφαβήτου Σ συμβολίζεται με Σ^*.
Η κενή συμβολοσειρά συμβολίζεται με ε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Παραδείγματα συμβολοσειρών)

- Η συμβολοσειρά $(\epsilon, \upsilon, \rho, \eta, \kappa, \alpha)$ του αλφαβήτου $\Sigma = \{\alpha, \beta, \ldots, \omega\}$. Για απλότητα παραλείπουμε παρενθέσεις και κόμματα και γράφουμε $\epsilon\upsilon\rho\eta\kappa\alpha$.
- Οι συμβολοσειρές του αλφαβήτου $D = \{0, 1, \ldots, 9\}$ είναι

$$D^* = \{\varepsilon, 0, 1, \ldots, 9, 00, 01, \ldots, 99, 000, 001, \ldots\}$$

Επαγωγικός ορισμός συμβολοσειρών

Ορισμός (Σύνολο συμβολοσειρών Σ^* αλφάβητου Σ)

- Βάση του ορισμού: Η κενή συμβολοσειρά ε ανήκει στο Σ^*.
- Επαγωγικό βήμα: Αν $w \in \Sigma^*$ και $\sigma \in \Sigma$ τότε $w\sigma \in \Sigma^*$.

Μήκος συμβολοσειράς

Ορισμός (Μήκος ℓ συμβολοσειράς)

- Βάση του ορισμού: Ορίζουμε $\ell(\varepsilon) = 0$.
- Επαγωγικό βήμα: Αν $w \in \Sigma^*$ και $\sigma \in \Sigma$ ορίζουμε $\ell(w\sigma) = \ell(w) + 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- $\ell(\epsilon\upsilon\rho\eta\kappa\alpha) = 6$
- $\ell(010) = 3$

Παράθεση δύο συμβολοσειρών

Ορισμός (Παράθεση δύο συμβολοσειρών)

- Βάση του ορισμού: Αν $w \in \Sigma^*$ ορίζουμε $w \circ \varepsilon = w$
- Επαγωγικό βήμα: Αν $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ και $\sigma \in \Sigma$ ορίζουμε $w_1 \circ (w_2\sigma) = (w_1 \circ w_2)\sigma$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- $\epsilon\upsilon \circ \rho\eta\kappa\alpha = \epsilon\upsilon\rho\eta\kappa\alpha$
- $010 \circ 00 = 01000$

Μήκος παράθεσης δυο συμβολοσειρών

Πρόταση

Για κάθε συμβολοσειρές $x, y \in \Sigma^*$, $\ell(x \circ y) = \ell(x) + \ell(y)$.

Απόδειξη.

Με δομική επαγωγή. Θεωρούμε τη συμβολοσειρά x σταθερά.
Βάση της επαγωγής: $y = \varepsilon$. Έχουμε $\ell(x \circ \varepsilon) = \ell(x) + \ell(\varepsilon)$.
Επαγωγικό βήμα:

$$\begin{aligned}
\ell(x \circ (y\sigma)) &= \ell((x \circ y)\sigma) && \text{από τον ορισμό της παράθεσης} \\
&= \ell(x \circ y) + 1 && \text{από τον ορισμό του μήκους} \\
&= (\ell(x) + \ell(y)) + 1 && \text{από την επαγωγική υπόθεση} \\
&= \ell(x) + (\ell(y) + 1) && \\
&= \ell(x) + \ell(y\sigma) && \text{από τον ορισμό του μήκους.}
\end{aligned}$$

□

Γλώσσες

Ορισμός

Έστω Σ ένα αλφάβητο. Γλώσσα καλείται ένα σύνολο συμβολοσειρών του Σ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Παραδείγματα γλωσσών)

- Η γλώσσα της δεκαδικής παράστασης των περιττών αριθμών: {1, 3, 5, 7,...}. Το αλφάβητο είναι το $\Sigma = \{0, 1, \ldots, 9\}$.
- Η γλώσσα της δυαδικής παράστασης των περιττών αριθμών: {1, 11, 101, 111,...}. Το αλφάβητο είναι το $\Sigma = \{0, 1, \ldots, 9\}$ ή το $\Sigma = \{0, 1\}$.
- Οι δυο γλώσσες είναι διαφορετικές. Τα στοιχεία τους είναι συμβολοσειρές, όχι αριθμοί.
- Άλλο είναι το σύνολο των περιττών αριθμών και άλλο είναι το σύνολο της δεκαδικής παράστασης των περιττών.

Παραδείγματα γλωσσών (συνέχ.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Παραδείγματα γλωσσών)

- Οι λέξεις της Ελληνικής γλώσσας σε πεζούς χαρακτήρες: {αβαείο, αβαθής, ..., ωώδης}. Το αλφάβητο είναι {α, β,...,ω, ά, ...ώ}.
- Τα συντακτικά ορθά προγραμμάτα της γλώσσας C. Το αλφάβητο είναι οι λατινικοί χαρακτήρες και κάποια επιπλέον σύμβολα όπως οι παρενθέσεις, τα σύμβολα των αριθμητικών πράξεων κλπ.
- Τα προγράμματα της γλώσσας C που υπολογίζουν ορθά αν η είσοδος είναι ένας πρώτος αριθμός (στο δεκαδικό σύστημα).

Παράδειγμα επαγωγικού ορισμού γλώσσας

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Ας ορίσουμε μια γλώσσα L του αλφαβήτου $\{0, 1\}$ ως εξής:
- Βάση του ορισμού: Η κενή συμβολοσειρά ε ανήκει στη γλώσσα L.
- Επαγωγικό βήμα: Αν $w, v \in L$ τότε και οι συμβολοσειρές
  - $0w1v$
  - $1w0v$

  ανήκουν στη γλώσσα L.
- Ποιές συμβολοσειρές ανήκουν στην L;
- $L = \{$ ε , 01, 10 , 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100 , 000111, 001011, 001101, 001110, $\ldots$ $\}$

Παράδειγμα γλώσσας (συνέχ.)

Πρόταση

Κάθε συμβολοσειρά u της γλώσσας L έχει ίσο αριθμό από 0 και 1.

Απόδειξη.

- $n_0(u)$ = αριθμός 0 στην u
- $n_1(u)$ = αριθμός 1 στην u
- Θέλουμε να δείξουμε $n_0(u) = n_1(u)$ για κάθε $u \in L$.

- Με δομική επαγωγή.
- Βάση της επαγωγής: $n_0(\varepsilon) = n_1(\varepsilon) = 0$.
- Επαγωγικό βήμα:
  - Επαγωγική υπόθεση $n_0(w) = n_1(w)$ και $n_0(v) = n_1(v)$.
  - Έχουμε $n_0(0w1v) = n_0(w) + n_0(v) + 1$
  - Έχουμε $n_1(0w1v) = n_1(w) + n_1(v) + 1$
  - Άρα $n_0(0w1v) = n_1(0w1v)$
  - Ομοίως προκύπτει $n_0(1w0v) = n_1(1w0v)$.

Παράδειγμα γλώσσας (συνέχ.)

Πρόταση

Κάθε συμβολοσειρά w του αλφαβήτου $\{0, 1\}$ με ίσο αριθμό από 0 και 1 ανήκει στη γλώσσα L.

Απόδειξη.

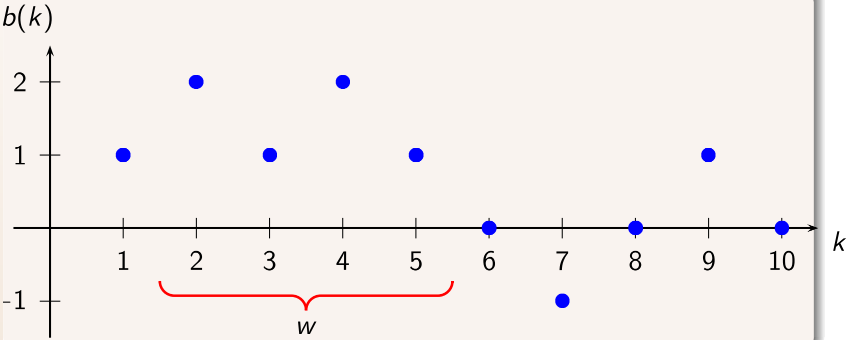
Με ισχυρή μαθηματική επαγωγή στο μήκος της συμβολοσειράς.
Βάση της επαγωγής: Αν $\ell(w) = 0$, δηλ. $w = \varepsilon$, $w \in L$.
Επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε ότι κάθε συμβολοσειρά με μήκος το πολύ n που έχει ίσο αριθμό από 0 και 1 ανήκει στην L.

- Έστω μια συμβολοσειρά u με μήκος το πολύ $n + 1$ και ίσο αριθμό από 0 και 1.
- Λόγω συμμετρίας υποθέτουμε ότι η συμβολοσειρά u αρχίζει με 0.
- Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχουν $w, v \in L$ τέτοια ώστε $u = 0w1v$.

Απόδειξη πρότασης

Έστω ότι $b(k)$ συμβολίζει τη διαφορά του αριθμού των 0 και του αριθμού των 1 στα πρώτα k σύμβολα της συμβολοσειράς u.

Η συνάρτηση $b(k)$ για $u = 0010111001$



$$u = 0010111001 = 0010111001$$

Απόδειξη πρότασης (συνέχεια)

Έστω $u = \sigma_1 \dots \sigma_n$. Ορίζουμε $k^* = \min\{k \mid b(k+1) = 0\}$.
Επειδή $b(n) = 0$, παίρνουμε:

Παρατήρηση

Το k^* είναι καλά ορισμένο και ισχύει ότι $k^* \in \{1, \dots, n-1\}$.

Αν $\sigma_{k^*+1} = 0$, το αρχικό μηδέν έχει «ακυρωθεί» πριν τη θέση $k^* + 1$. Άρα:

Παρατήρηση

Δεδομένου ότι $\sigma_1 = 0$, τότε $\sigma_{k^*+1} = 1$.

Ισχύει λοιπόν ότι $u = \textcolor{red}{0}\sigma_2 \dots \sigma_{k^*}\textcolor{red}{1}\sigma_{k^*+2} \dots \sigma_n$.

Απόδειξη πρότασης (συνέχεια)

Ορίζουμε $w = \sigma_2 \ldots \sigma_{k^*}$ και

$$v = \begin{cases} \varepsilon & \text{αν } k^* = n - 1 \\ \sigma_{k^*+2} \ldots \sigma_n & \text{αν } k^* < n - 1 \end{cases}$$

Παρατήρηση

Τα w και v έχουν ίσο πλήθος από μηδέν και άσους. Άρα $u = 0w1v$ όπου από την Επαγωγική Υπόθεση, $w, v \in L$.

Επαγωγικός ορισμός κανονικών δυαδικών δένδρων

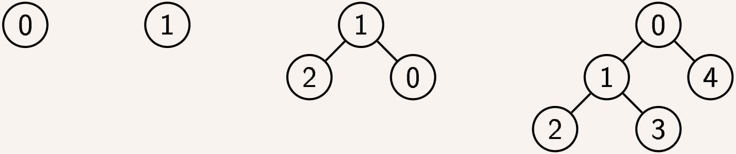
Ορισμός (Κανονικά δυαδικά δένδρα με κορυφές από το U)

Βάση του ορισμού: Κάθε στοιχείο v του U ορίζει το δυαδικό δένδρο $T = (v, V(T))$. Το T έχει *ρίζα* το v, σύνολο κορυφών το $V(T) = \{v\}$, και ύψος $h(T) = 0$.
Επαγωγικό βήμα: Έστω T_1, T_2 είναι δένδρα με σύνολα κορυφών ξένα μεταξύ τους και ρίζες r_1, r_2 αντίστοιχα. Έστω επίσης r ένα στοιχείο του U, $r \notin V(T_1) \cup V(T_2)$.

- Ορίζουμε το δένδρο $T = (r, V(T_1) \cup V(T_2) \cup \{r\})$ με ρίζα το r.
- Το σύνολο των κορυφών του T είναι όλες οι κορυφές των T_1, T_2 μαζί με το r.
- Το ύψος $h(T)$ του δένδρου T ορίζεται σαν $1 + \max\{h(T_1), h(T_2)\}$.

Παραδείγματα δένδρων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Παραδείγματα δένδρων)



Ύψος κανονικών δυαδικών δένδρων

Πρόταση

Για κάθε κανονικό δυαδικό δένδρο T ισχύει ότι το πλήθος $n(T)$ των κορυφών του είναι το πολύ $2^{h(T)+1} - 1$.

Απόδειξη.

- Βάση δομικής επαγωγής: Αν το δένδρο αποτελείται μόνο από τη ρίζα του, έχει εξ ορισμού ύψος 0 και μία κορυφή.
- Επαγωγικό βήμα: Έστω δυαδικό δένδρο T με δύο υποδένδρα T_1 και T_2. Εξ ορισμού, οι κορυφές του T είναι οι κορυφές του T_1, οι κορυφές του T_2, και η ρίζα του T. Άρα, $n(T) = n(T_1) + n(T_2) + 1$. Επίσης εξ ορισμού, το ύψος του είναι $h(T) = 1 + \max\{h(T_1), h(T_2)\}$.
- Επαγωγική υπόθεση: $n(T_1) \leq 2^{h(T_1)+1} - 1$ και $n(T_2) \leq 2^{h(T_2)+1} - 1$.

$\square$

Ύψος κανονικών δυαδικών δένδρων (συνέχ.)

Συνέχ.

$$\begin{aligned}
n(T) &= n(T_1) + n(T_2) + 1 \\
&\leq (2^{h(T_1)+1} - 1) + (2^{h(T_2)+1} - 1) + 1 \\
&= 2^{h(T_1)+1} + 2^{h(T_2)+1} - 1 \\
&\leq 2 \cdot \max\{2^{h(T_1)+1}, 2^{h(T_2)+1}\} - 1 \\
&= 2 \cdot 2^{\max\{h(T_1)+1, h(T_2)+1\}} - 1 \\
&= 2 \cdot 2^{\max\{h(T_1), h(T_2)\}+1} - 1 \\
&= 2 \cdot 2^{h(T)} - 1 \\
&= 2^{h(T)+1} - 1
\end{aligned}$$

$\square$