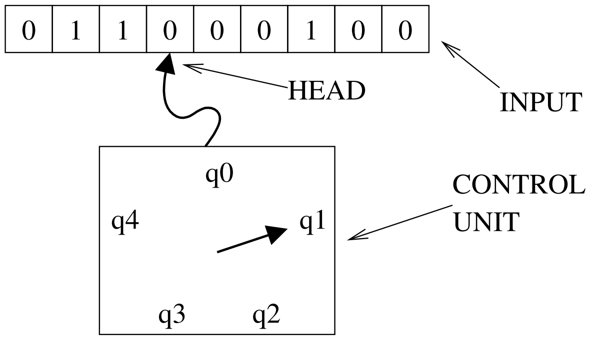
Πεπερασμένα Αυτόματα (ΠΑ)

Τα πεπερασμένα αυτόματα είναι οι απλούστερες «υπολογιστικές μηχανές».

Δεν έχουν μνήμη, μόνο μία εσωτερική μονάδα με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων.

Διαβάζουν τη συμβολοσειρά εισόδου από αριστερά προς τα δεξιά. Κάθε σύμβολο προκαλεί αλλαγή της εσωτερικής κατάστασης.



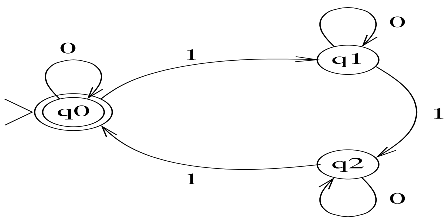
Ορισμός Πεπερασμένων Αυτομάτων

Ένα πεπερασμένο αυτόματο M είναι μια πεντάδα $M(K, \Sigma, \delta, s, F)$, όπου:

- K είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, το σύνολο καταστάσεων.
- Σ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, το αλφάβητο.
- s είναι μία κατάσταση, $s \in K$, που ονομάζεται αρχική κατάσταση.
- F είναι υποσύνολο του $K, F \subseteq K$, που ονομάζεται σύνολο τελικών καταστάσεων.
- δ είναι μία συνάρτηση, $\delta : K \times \Sigma \to K$ και ονομάζεται συνάρτηση μετάβασης.

Η συνάρτηση μετάβασης δ καθορίζει ουσιαστικά τη λειτουργία του αυτομάτου. Αν q είναι η κατάστασή του και το επόμενο σύμβολο της εισόδου είναι σ, τότε $\delta(q, \sigma)$ είναι η επόμενη κατάσταση του αυτομάτου.

Διάγραμμα καταστάσεων ΠΑ



$>$: αρχική κατάσταση. $\circledcirc$: τελική κατάσταση.

Το διάγραμμα δείχνει ένα ΠΑ με $K = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $s = q_0$, $F = \{q_0\}$ και δ

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	0	q_0
q_0	1	q_1
q_1	0	q_1
q_1	1	q_2
q_2	0	q_2
q_2	1	q_0

Γλώσσες και Πεπερασμένα Αυτόματα

Λέμε ότι ένα ΠΑ $M(K, \Sigma, \delta, s, F)$ *δέχεται* τη συμβολοσειρά w, αν ξεκινώντας από την αρχική κατάσταση s, αφού «καταναλώσει» την είσοδο, καταλήγει σε κάποια κατάσταση του F. Για να ορίσουμε πιο αυστηρά την έννοια «δέχεται» χρειάζεται να ορίσουμε τη σχέση «παράγει».

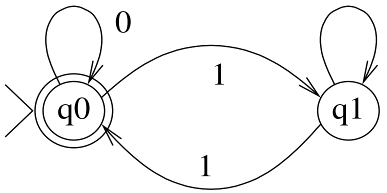
Η δυαδική σχέση $\vdash_M$ (*«παράγει σε ένα βήμα»*) ορίζεται ως εξής:
$(q, w) \vdash_M (q', w')$, αν και μόνο αν

- $w = \sigma w'$, για κάποιο $\sigma \in \Sigma$
- $q' = \delta(q, \sigma)$

Η $\vdash_M$ είναι μια συνάρτηση $\vdash_M$: $K \times \Sigma^+ \to K \times \Sigma^*$

Τα στοιχεία του $K \times \Sigma^*$ τα ονομάζουμε συνολικές καταστάσεις ή εναλλακτικά φάσεις (configurations).

Παράδειγμα:



Με είσοδο 1101 το αυτόματο δουλεύει ως εξής:

- $(q_0, 1101) \vdash_M (q_1, 101)$
- $(q_1, 101) \vdash_M (q_0, 01)$
- $(q_0, 01) \vdash_M (q_0, 1)$
- $(q_0, 1) \vdash_M (q_1, \varepsilon)$

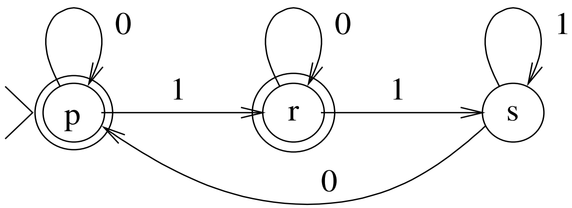
Ορίζουμε τη σχέση $\vdash_M^*$ («παράγει σε μηδέν ή περισσότερα βήματα») ως εξής:

$$(q, w) \vdash_M^* (q', w')$$

αν και μόνο αν υπάρχουν $q_1, \ldots, q_{n-1} \in K$ και $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \in \Sigma$ τέτοια ώστε

- $w = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n w'$
- $(q, \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n w') \vdash_M (q_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n w') \vdash_M \ldots \vdash_M (q_{n-1}, \sigma_n w') \vdash_M (q', w')$

Παράδειγμα:



$$(p, 0110) \vdash_M^* (p, 0110)$$
$$(p, 0110) \vdash_M^* (s, 0)$$
$$(p, 0110) \vdash_M^* (p, \varepsilon)$$

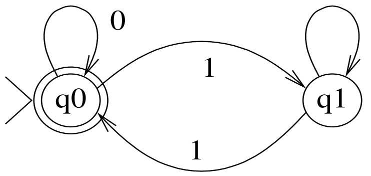
Παρατηρειστε οτι η $\vdash_M^*$ δεν είναι συνάρτηση αλλά σχέση (γιατί δεν προκαθορίζει πόσα βήματα θα γίνουν).

Λέμε ότι το M δέχεται τη συμβολοσειρά w ή ότι η w είναι αποδεκτή από το M, αν και μόνο αν

$$(s, w) \vdash_M^* (q, \varepsilon), \text{ για κάποιο } q \in F$$

Ορίζουμε τη γλώσσα $L(M)$ ενός ΠΑ $M(K, \Sigma, \delta, s, F)$ σαν το σύνολο των συμβολοσειρών που είναι αποδεκτές από M.

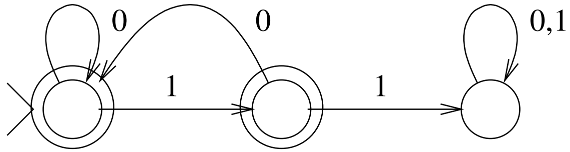
$$L(M) = \{w : w \text{ είναι αποδεκτό από το } M\}$$



$$L(M) = \{w : w \text{ περιέχει άρτιο αριθμό από } 1\}$$

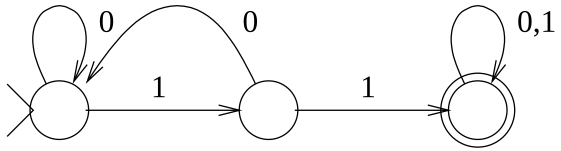
Παράδειγμα: Σχεδιάστε ΠΑ που να δέχεται τη γλώσσα

$$L = \{w : w \text{ δεν περιέχει } 11\}$$

Απάντηση: 

Παράδειγμα: Σχεδιάστε ΠΑ που να δέχεται τη γλώσσα

$$\bar{L} = \{w : w \text{ περιέχει } 11\}$$

Απάντηση: 

Σχεδόν το ίδιο αυτόματο. Οι τελικές καταστάσεις του ενός είναι οι μη τελικές καταστάσεις του άλλου.

Μη Ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

Γενίκευση των ντετερμινιστικών ΠΑ. Αντί για συνάρτηση μετάβασης δ που καθορίζει απολύτως την επόμενη κατάσταση, τα μη ντετερμινιστικά ΠΑ έχουν κάποια σχέση μετάβασης Δ που επιτρέπει 0, 1, 2 ή περισσότερες επόμενες καταστάσεις.

Καθώς το μη ντετερμινιστικό ΠΑ υπολογίζει, συνυπάρχουν πολλές διαφορετικές «ενσαρκώσεις» του.

Γιατί μελετάμε μη ντετερμινιστικές μηχανές;

- Γιατί διευκολύνουν τις αποδείξεις.
- Γιατί αποτελούν τον πιο φυσικό και σύντομο τρόπο για να περιγράψουμε κάποιες γλώσσες.

Ορισμός μη Ντετερμινιστικών ΠΑ

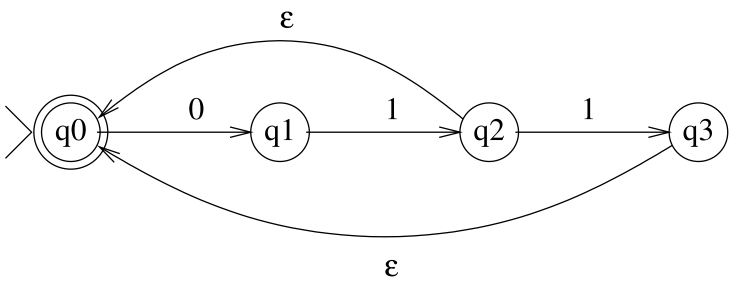
Ένα μη ντετερμινιστικό ΠΑ είναι μια πεντάδα $M(K, \Sigma, \Delta, s, F)$, όπου

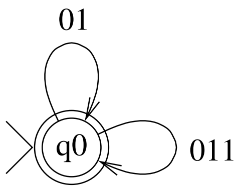
K	:	σύνολο καταστάσεων	Όπως ακριβώς και στον ορισμό των ντετερμινιστικών ΠΑ.
Σ	:	αλφάβητο	
s	:	αρχική κατάσταση	
F	:	σύνολο τελικών καταστάσεων	
και Δ	:	η σχέση μετάβασης	

$$\Delta \subseteq K \times \Sigma^* \times K$$

(σύμφωνα με το βιβλίο Lewis-Papadimitriou $\Delta \subseteq K \times \Sigma \cup \{\varepsilon\} \times K$)

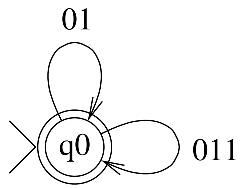
Παραδείγματα μη Ντετερμινιστικών ΠΑ





Μπορούμε να επεκτείνουμε όλους τους ορισμούς που αφορούν ντετερμινιστικά ΠΑ. Η βασική διαφορά είναι η εξής:

Λέμε ότι «το M δέχεται το w», αν **υπάρχει** κάποια ακολουθία μεταβάσεων που καταλήγει σε τελική κατάσταση του F.

Παράδειγμα: Το  δέχεται τη συμβολοσειρά $\underbrace{011}\underbrace{01}$.

Ο ορισμός της σχέσης $\vdash_M$ για μη ντετερμινιστικά ΠΑ είναι

$$(q,w) \vdash_M (q',w'), \text{ αν και μόνο αν } \textbf{υπάρχει } u \in \Sigma^*, \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$\begin{aligned} &1)\ \ w = uw' \\ \text{και}\ \ &2)\ \ (q,u,q') \in \Delta \end{aligned}$$

Οι άλλοι ορισμοί είναι ίδιοι για ντετερμινιστικά και μη ντετερμινιστικά ΠΑ.

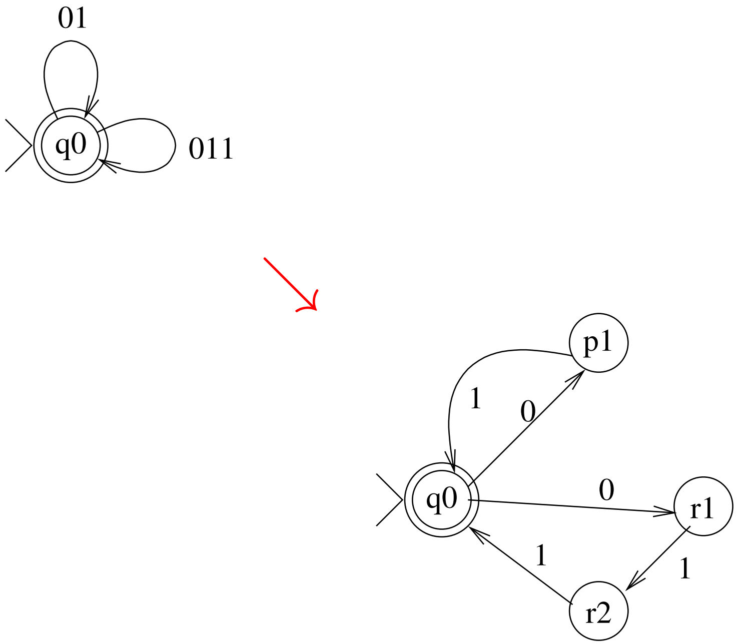
Θα χρειαστούμε και τον εξής συμβολισμό για $q \in K$:
$E(q) = \{p \in K \mid (q,\varepsilon) \vdash_M^* (p,\varepsilon)\}$.

Ισοδυναμία ντετερμινιστικών και μη ντετερμινιστικών πεπερασμένων αυτομάτων

Θεώρημα: Για κάθε μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο M υπάρχει ένα ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο M'' τέτοιο ώστε $L(M) = L(M'')$.

Απόδειξη: Έστω $M(K,\Sigma,s,\Delta,F)$ ένα μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο.

Βήμα 1. θα το μετατρέψουμε έτσι ώστε κάθε μετάβαση να γίνεται με το πολύ ένα σύμβολο. Αντικαθιστούμε κάθε μετάβαση $(q,\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k,q')$ όπου $k>1$ με τις μεταβάσεις $(q,\sigma_1,p_1),(p_1,\sigma_2,p_2),\ldots,(p_{k-1},\sigma_k,q')$, και προσθέτουμε νέες καταστάσεις $p_1,p_2,\ldots,p_{k-1}$.



Έστω $M'(K', \Sigma, \Delta', s', F')$ το αποτέλεσμα του Βήματος 1.

Βήμα 2. Θα μετασχηματίσουμε το M' σε ένα ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο $M''(K'', \Sigma, \delta'', s'', F'')$.
Καθώς το M' επεξεργάζεται την είσοδο, σε ένα δεδομένο βήμα, η κάθε του «ενσάρκωση» μπορεί να βρίσκεται σε διαφορετική κατάσταση.
Θέλουμε το M'' να βρίσκεται «ταυτόχρονα» σε όλες αυτές τις πιθανές καταστάσεις. Αλλά, ανά πάσα στιγμή, ένα ντετερμινιστικό αυτόματο βρίσκεται σε μία μόνο κατάσταση. Επομένως οι καταστάσεις του M'' πρέπει να κωδικοποιούν σύνολα από πιθανές καταστάσεις. Οι καταστάσεις του M'' πρέπει να είναι τα υποσύνολα του K'.

Η μετάβαση (Q, σ, Q') επιτρέπεται αν το τρέχον πιθανό σύνολο καταστάσεων είναι το Q και αφού διαβαστεί το σύμβολο σ το νέο σύνολο όλων των πιθανών καταστάσεων είναι το Q'.

Το σύνολο των καταστάσεων που είναι προσιτές από την q χωρίς να διαβαστεί κανένα σύμβολο: $E(q) := \{p \in K' : (q, \epsilon) \vdash^*_{M'} (p, \epsilon)\}$.

Ορίζουμε τώρα το $M''(K'', \Sigma, \delta'', s'', F'')$ ως εξής:

- $K'' = 2^{K'}$, το σύνολο όλων των υποσυνόλων του K'.
- Η συνάρτηση δ'' ορίζεται ως

$$\delta''(Q, \sigma) = \bigcup_{p \in \mathrm{NEXT}_{Q,\sigma}} E(p) \qquad \forall Q \in K'', \sigma \in \Sigma$$

  όπου $\mathrm{NEXT}_{Q,\sigma} = \{p \in K' \colon (q, \sigma, p) \in \Delta'$ για κάποιο $q \in Q\}$.
- $s'' = E(s')$.
- $F'' = \{Q : Q \subseteq K',\ Q \cap F' \neq \emptyset\}$.

Υπολείπεται μια απόδειξη πως $L(M) = L(M'')$:
Με επαγωγή στο μήκος της συμβολοσειράς εισόδου ...