Ιδιότητες των γλωσσών των πεπερασμένων αυτομάτων

Θεώρημα 1 *Η κλάση των γλωσσών των πεπερασμένων αυτομάτων είναι κλειστή ως προς:*

1. *Ένωση*
2. *Παράθεση*
3. *Kleene star*
4. *Συμπλήρωμα*
5. *Τομή*

Κανονικές εκφράσεις και ΠΑ

Θεώρημα 2 *Μία γλώσσα είναι κανονική αν και μόνο αν είναι γλώσσα κάποιου πεπερασμένου αυτομάτου.*

Απόδειξη: Είναι σχετικά εύκολο αν μας δοθεί μία κανονική έκφραση να κατασκευάσουμε ένα μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο μέ την ίδια γλώσσα. Το αντίστροφο είναι λίγο πιο πολύπλοκο.

Ιδιότητες κλειστότητας των κανονικών γλωσσών

Από τα Θεωρήματα 1 και 2 έπεται απευθείας το εξής:

Θεώρημα 3 *Η κλάση των κανονικών γλωσσών είναι κλειστή ως προς:*

1. *Ένωση*
2. *Παράθεση*
3. *Kleene star*
4. *Συμπλήρωμα*
5. *Τομή*

Θεώρημα Άντλησης (Pumping Lemma)

Θεώρημα 4 (Θεώρημα Άντλησης, Pumping Lemma) *Έστω L μια άπειρη κανονική γλώσσα. Υπάρχει ακέραιος $k \geq 1$, τ.ω., για κάθε $w \in L$, με $|w| \geq k$ υπάρχουν x, y, z με $y \neq \varepsilon$ τέτοια ώστε $w = xyz$, $|xy| \leq k$, και $xy^n z \in L$ για κάθε $n \geq 0$.*

Απόδειξη: Έστω M ένα ντετερμινιστικό ΠΑ με k καταστάσεις που δέχεται τη γλώσσα L. Αφού η L είναι άπειρη, υπάρχει κάποιο $w = \sigma_1 \cdots \sigma_l \in L$ με $l \geq k$. Όταν το M διαβάζει τους k πρώτους χαρακτήρες του w περνάει από κάποιες καταστάσεις $s = q_0, q_1, \ldots, q_k$.

Τουλάχιστον δύο από τις καταστάσεις $q_0, q_1, \ldots, q_k$ είναι ίδιες (Pigeonhole Principle ή Αρχή του Περιστερεώνα). Έστω λοιπόν ότι $q_i = q_j$ γιά κάποια $i < j \leq k$. Έστω $x = \sigma_1 \cdots \sigma_i$ είναι το τμήμα του w μέχρι την κατάσταση q_i, $y = \sigma_{i+1} \cdots \sigma_j$ το τμήμα του w ανάμεσα στην q_i και στην q_j, και $z = \sigma_{j+1} \cdots \sigma_l$ το τμήμα μετά την q_j. Τότε $w = xyz$ και $y \neq \varepsilon$.

Το M δέχεται επίσης όλες τις συμβολοσειρές $xy^n z$ ως εξής: Γιά το x περνάει από τις καταστάσεις $q_0, \ldots, q_i$, για το y^n κάνει n κύκλους $q_i, \ldots, q_j$, και για το z περνάει από καταστάσεις $q_{j+1}, \ldots, q_l$ και καταλήγει στην $q_l \in F$.

Μη κανονικότητα γλωσσών: με το Θεώρημα Άντλησης

Να δειχτεί ότι η γλώσσα $L = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ δεν είναι κανονική.

Έστω πως η L είναι κανονική. Επειδή η L είναι άπειρη μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Άντλησης.

Διαλέγουμε $w = 0^k 1^k$ όπου k η σταθερά του Θεωρήματος για την L. Υπάρχουν x, y, z τέτοια ώστε $w = xyz$, $|xy| \leq k$ και $xy^n z \in L$ για κάθε $n \geq 0$.

Το y αποτελείται μόνο από 0 (γιατί;). Τότε το $xy^0 z = xz$ έχει λιγότερα 0 από 1 (αφού $y \neq \varepsilon$) και δεν ανήκει στην L.

Βρήκαμε λοιπόν κάποιο n για το οποίο $xy^n z \notin L$. Άτοπο. Συνεπώς η L δεν είναι κανονική.

Μη κανονικότητα γλωσσών: με τις ιδιότητες κλειστότητας

Έστω L η γλώσσα όλων των συμβολοσειρών του αλφαβήτου $\Sigma = \{(,)\}$ με ταιριασμένες παρενθέσεις (δηλαδή κάθε δεξιά παρένθεση αντιστοιχεί σε μία και μοναδική προηγούμενη αριστερή παρένθεση). Π.χ. $(()())(()) \in L$ αλλά $())(() \notin L$. Να δειχτεί ότι η γλώσσα L δεν είναι κανονική.

Δέν θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Άντλησης αλλά θα εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι η γλώσσα

$$L_1 = \{(^n)^n : n \geq 0\}$$

δεν είναι κανονική (η L_1 είναι σχεδόν ίδια με τη γλώσσα του προηγουμένου παραδείγματος). Εστω

$$L_2 = \{(^*)^*\}$$

που προφανώς είναι κανονική γλώσσα. Οι τρεις γλώσσες έχουν την εξής σχέση:

$$L_1 = L \cap L_2.$$

Αν η L ήταν κανονική τότε και η $L \cap L_2$ θα ήταν κανονική (η τομή δύο κανονικών γλωσσών είναι κανονική). Δηλαδή και η $L_1 = L \cap L_2$ θα ήταν κανονική, άτοπο.

Αλγόριθμοι για πεπερασμένα αυτόματα

Θεώρημα 5 *Υπάρχουν πολυωνυμικοί αλγόριθμοι που απαντούν στα παρακάτω ερωτήματα για πεπερασμένα αυτόματα:*

1. *Δίνεται M και w. Ανήκει το w στην $L(M)$;*
2. *Δίνεται M. Ισχύει $L(M) = \emptyset$; (Έλεγξε αν υπάρχει μονοπάτι απο την αρχική σε μία τελική κατάσταση.)*
3. *Δίνεται ντετερμινιστικό M. Ισχύει $L(M) = \Sigma^*$; (Ανάγεται στο (2). Πώς;)*
4. *Δίνονται ντετερμινιστικά ΠΑ M_1, M_2. Ισχύει $L(M_1) \subseteq L(M_2)$; (Έλεγξε αν $L(M_1) \cap \overline{L(M_2)} = \emptyset$.)*
5. *Δίνονται ντετερμινιστικά ΠΑ M_1, M_2. Ισχύει $L(M_1) = L(M_2)$; (Ανάγεται στο (4). Πώς;)*

Αλγόριθμοι για πεπερασμένα αυτόματα

Θεώρημα 6 *Υπάρχουν πολυωνυμικοί αλγόριθμοι που απαντούν στα παρακάτω ερωτήματα για πεπερασμένα αυτόματα:*

1. *Δίνεται M και w. Ανήκει το w στην $L(M)$;*
2. *Δίνεται M. Ισχύει $L(M) = \emptyset$;*
   (Έλεγξε αν υπάρχει μονοπάτι από την αρχική σε μία τελική κατάσταση.)
3. *Δίνεται ντετερμινιστικό ΠΑ M. Ισχύει $L(M) = \Sigma^*$;*
   (Ανάγεται στο (2). Πώς;)
4. *Δίνονται ντετερμινιστικά ΠΑ M_1, M_2. Ισχύει $L(M_1) \subseteq L(M_2)$;*
   (Έλεγξε αν $L(M_1) \cap \overline{L(M_2)} = \emptyset$.)
5. *Δίνονται ντετερμινιστικά ΠΑ M_1, M_2. Ισχύει $L(M_1) = L(M_2)$;*
   (Ανάγεται στο (4). Πώς;)

Αλγόριθμοι για πεπερασμένα αυτόματα II

Υπάρχουν πολυωνυμικοί αλγόριθμοι που απαντούν στα παρακάτω ερωτήματα για πεπερασμένα αυτόματα:

3. Δίνεται ντετερμινιστικό M. Ισχύει $L(M) = \Sigma^*$; (Ανάγεται στο (2).)
4. Δίνονται ντετερμινιστικά ΠΑ M_1, M_2. Ισχύει $L(M_1) \subseteq L(M_2)$; (Έλεγξε αν $L(M_1) \cap \overline{L(M_2)} = \emptyset$.)
5. Δίνονται ντετερμινιστικά ΠΑ M_1, M_2. Ισχύει $L(M_1) = L(M_2)$; (Ανάγεται στο (4). Πώς;)

Τί συμβαίνει αν τα M_1, M_2 δεν είναι ντετερμινιστικά;

Οι αλγόριθμοι που δώσαμε μπορούν να δουλέψουν αν τα μετατρέψουν πρώτα σε ισοδύναμα ντετερμινιστικά M_1', M_2'. Αυτό όμως παίρνει εκθετικό χρόνο στη χειρότερη περίπτωση (βλ. την κατασκευή που δώσαμε).

Δεν γνωρίζουμε υποεκθετικούς αλγορίθμους για τα προβλήματα 3, 4 και 5 στην περίπτωση που τα M_1, M_2 είναι μη ντετερμινιστικά.

Οι αλγόριθμοι για τα 1, 2 δεν επηρεάζονται.