Υπολογισμοί με Μ.Τ.

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{y, n\})$ μια Μ.Τ. Κάθε συνολική κατάσταση τερματισμού της οποίας η κατάσταση τερματισμού είναι το y, θα ονομάζεται συνολική κατάσταση αποδοχής, ενώ αν η κατάσταση τερματισμού είναι το n, θα ονομάζεται συνολική κατάσταση απόρριψης.

Λέμε οτι η M δέχεται μια είσοδο $w \in (\Sigma - \{\sqcup, \triangleright\})^*$ αν η $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w)$ παράγει μία συνολική κατάσταση αποδοχής. Λέμε ότι η M απορρίπτει την w αν η $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w)$ παράγει μια συνολική κατάσταση απόρριψης.

Έστω $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\sqcup, \triangleright\}$. Λέμε ότι η M αποφασίζει μία γλώσσα $L \subseteq \Sigma_0^*$ αν για κάθε $w \in \Sigma_0^*$:

- αν $w \in L$, η M δέχεται την w
- αν $w \notin L$, η M απορρίπτει την w.

Μια γλώσσα λέγεται αναδρομική αν υπάρχει μια Μ.Τ. που την αποφασίζει.

Αναδρομικές Συναρτήσεις

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$ μια Μ.Τ., έστω $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\sqcup, \triangleright\}$ και έστω $w \in \Sigma_0^*$. Υποθέτουμε ότι η M τερματίζει με είσοδο w, και ότι $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w) \vdash_M^* (h, \triangleright\underline{\sqcup}y)$, για κάποιο $y \in \Sigma_0^*$. Το y ονομάζεται η έξοδος της M με είσοδο w και συμβολίζεται με $M(w)$.

Έστω $f : \Sigma_0^* \to \Sigma_0^*$. Λέμε ότι η M υπολογίζει τη συνάρτηση f αν, για κάθε $w \in \Sigma_0^*$, $M(w) = f(w)$.

Μια συνάρτηση f ονομάζεται αναδρομική, αν υπάρχει μία Μ.Τ. που την υπολογίζει.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ που ορίζεται ως $f(w) = ww$, μπορεί να υπολογιστεί από μια Μ.Τ. που πρώτα αντιγράφει το w (μηχανή C) και μετά κάνει μετατόπιση προς τα αριστερά (μηχανή $S_{\leftarrow}$).

Αναδρομικές Συναρτήσεις, συνέχεια

Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε αριθμητικές συναρτήσεις;

Μηχανές Turing που υπολογίζουν συναρτήσεις από το $\{0,1\}^*$ στο $\{0,1\}^*$ μπορούν να θεωρηθούν ως μηχανές που υπολογίζουν συναρτήσεις από τους φυσικούς αριθμούς στους φυσικούς αριθμούς.

Έστω w δυαδική συμβολοσειρά. Με $num(w)$ συμβολίζουμε τον αριθμό που αναπαριστά το w.

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$ μια Μ.Τ. τέτοια ώστε $0, 1, ; \in \Sigma$, και έστω $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Λέμε ότι η M υπολογίζει τη συνάρτηση f αν για όλα τα $w_1, \ldots, w_k \in \mathcal{L}((0 \cup 1)(0 \cup 1)^*)$ (ισοδύναμα $\in \{0,1\}\{0,1\}^*$)

$$num(M(w_1; \ldots ; w_k)) = f(num(w_1), \ldots, num(w_k))$$

Αναδρομικές Συναρτήσεις, συνέχεια

Παράδειγμα: Μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε μια Μ.Τ. που να υπολογίζει τη συνάρτηση διαδοχής στους φυσικούς αριθμούς (δηλαδή τη συνάρτηση $f(n) = n + 1$).

Αναδρομικά Απαριθμήσιμες Γλώσσες

Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$ μια Μ.Τ., έστω $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\sqcup, \triangleright\}$ και έστω $L \subseteq \Sigma_0^*$ μια γλώσσα. Λέμε ότι η M ημιαποφασίζει την L αν για κάθε συμβολοσειρά $w \in \Sigma_0^*$ αληθεύει το εξής: $w \in L$ αν και μόνο αν η M τερματίζει με είσοδο w. Μία γλώσσα είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη αν και μόνο αν υπάρχει μία Μ.Τ. που ημιαποφασίζει την L.

Οι Μ.Τ. που ημιαποφασίζουν γλώσσες δεν είναι αλγόριθμοι. Αν μια Μ.Τ. ημιαποφασίζει μια γλώσσα L και της δοθεί ως είσοδος μια συμβολοσειρά $w \notin L$, τότε δεν θα ξέρουμε ποτέ αν έχουμε περιμένει αρκετά για μια απάντηση.

Ποιά η σχέση ανάμεσα στις αναδρομικές και τις αναδρομικά απαριθμήσιμες γλώσσες;

Αναδρομικές - Αναδρομικά Απαριθμήσιμες Γλώσσες: Ιδιότητες

Θεώρημα: Αν μια γλώσσα είναι αναδρομική, τότε είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη.

Απόδειξη: Δεδομένης μιας Μ.Τ. $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{y, n\})$ που αποφασίζει μια γλώσσα L, ορίζουμε $M' = (K, \Sigma, \delta', s, \{y\})$, όπου δ' είναι η δ επαυξημένη με τις μεταβάσεις $\delta'(n, a) = (n, a)$, για όλα τα $a \in \Sigma$.

Θεώρημα: Αν η L είναι μία αναδρομική γλώσσα, τότε το συμπλήρωμα $\overline{L}$ της L είναι επίσης αναδρομική γλώσσα.

Απόδειξη: Έστω ότι η L αποφασίζεται από τη Μ.Τ. $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{y, n\})$. Τότε η $\overline{L}$ αποφασίζεται από τη Μ.Τ. $M' = (K, \Sigma, \delta', s, \{y, n\})$ όπου:

$$\delta'(q,a) = \begin{cases} (n, X), & \text{αν } \delta(q,a) = (y, X), X \in \Sigma \cup \{\leftarrow, \rightarrow\} \\ (y, X), & \text{αν } \delta(q,a) = (n, X), X \in \Sigma \cup \{\leftarrow, \rightarrow\} \\ \delta(q,a), & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Επεκτάσεις της Μηχανής Turing

1. ταινία άπειρη και προς τις δύο κατευθύνσεις.
2. πολλές ταινίες αντί μόνο μία.
3. πολλές κεφαλές αντί μία.
4. δισδιάστατη ταινία.

Αυτές οι επιπλέον δυνατότητες διευκολύνουν το σχεδιασμό μιας μηχανής για μερικά προβλήματα και σε πολλές περιπτώσεις μειώνουν τον απαιτούμενο αριθμό υπολογιστικών βημάτων για την εκτέλεση κάποιων εργασιών.

Οι επεκτάσεις δεν προσθέτουν τίποτα στις κλάσεις των συναρτήσεων που υπολογίζονται ή των γλωσσών που γίνονται αποδεκτές από τις κοινές Μ.Τ.

Οποιαδήποτε από τις «επαυξημένες» μηχανές μπορούμε να την προσομοιώσουμε με μία κοινή Μ.Τ.

Η έννοια της προσομοίωσης

Μια Μ. Τ. S προσομοιώνει τη Μ. Τ. M αν επιδεικνύει την ίδια συμπεριφορά με την M όσον αφορά την είσοδο και την έξοδο της: η S αποφασίζει ή ημιαποφασίζει την ίδια γλώσσα με την M ή υπολογίζει την ίδια συνάρτηση.

Συνήθως (αλλά όχι πάντα), η S μιμείται βήμα προς βήμα τη λειτουργία της M. Για κάθε βήμα της προσομοιούμενης M, η S εκτελεί μια κατάλληλη ομάδα δικών της βημάτων.

Μηχανές Turing με πολλές ταινίες

Μια M.T. $k \geq 1$ ταινιών είναι μια πεντάδα $(K, \Sigma, \delta, s, H)$, όπου K, Σ, s, H όπως συνήθως, και δ συνάρτηση από το $(K-H)\times\Sigma^k$ στο $K\times(\Sigma\cup\{\leftarrow,\rightarrow\})^k$. Δηλαδή, για κάθε κατάσταση q και κάθε k-άδα από σύμβολα της ταινίας $(a_1,\ldots,a_k)$, έχουμε $\delta(q,(a_1,\ldots,a_k)) = (p,(b_1,\ldots,b_k))$.

Μια συνολική κατάσταση σε μια M.T. k ταινιών προσδιορίζει την κατάσταση, τα περιεχόμενα της ταινίας και τη θέση της κεφαλής σε καθεμία από τις k ταινίες. Επομένως, μια συνολική κατάσταση θα συμβολίζεται στη μορφή $(q,(w_1\underline{a_1}u_1,\ldots,w_k\underline{a_k}u_k))$.

Ο ορισμός της έννοιας παράγει σε ένα βήμα είναι απλή επέκταση του αντίστοιχου ορισμού για τις απλές M.T. (μόνο που τώρα σε ένα βήμα επηρεάζονται και οι k ταινίες).

Υπολογισμοί με M.T. k ταινιών

Υιοθετούμε τις ακόλουθες συμβάσεις:

- Η συμβολοσειρά εισόδου τοποθετείται στην πρώτη ταινία, με τον ίδιο τρόπο όπως και σε μια απλή M.T.
- Οι άλλες ταινίες είναι αρχικά κενές, με την κεφαλή στο αριστερότερο τετράγωνο της καθεμίας.
- Στο τέλος του υπολογισμού, η μηχανή θα αφήσει την έξοδο της στην πρώτη της ταινία.
- Τα περιεχόμενα των άλλων ταινιών χρησιμοποιούνται μόνο για ενδιάμεσους υπολογισμούς.

Η ύπαρξη πολλαπλών ταινιών διευκολύνει το σχεδιασμό M. T.

Ισοδυναμία με απλές M.T.

Θεώρημα: Οποιαδήποτε συνάρτηση υπολογίζεται, ή οποιαδήποτε γλώσσα αποφασίζεται ή ημιαποφασίζεται από μια μηχανή Turing k ταινιών, υπολογίζεται, αποφασίζεται ή ημιαποφασίζεται από μια απλή μηχανή Turing.

Απόδειξη (Σκιαγράφηση): Μπορούμε να προσομοιώσουμε μια M.T. M $k > 1$ ταινιών χρησιμοποιώντας μια απλή M.T. S. Γράφουμε τα περιεχόμενα των k ταινιών πάνω στη μοναδική ταινία της S το ένα μετά το άλλο, χωρίζοντας τα με κάποιο ειδικό σύμβολο (▲).

Δηλ. η S διατηρεί στην ταινία της k ζώνες – αντίγραφα των «ενεργών» περιοχών των ταινιών της M.

Για να γνωρίζουμε σε ποιο σημείο βρίσκονται οι k κεφαλές της M σε κάθε ταινία, χρησιμοποιούμε μια τελεία πάνω από τα αντίστοιχα k σύμβολα στην ταινία της S (στην ουσία έχουμε επεκτείνει το αλφάβητο).

Η S για κάθε βήμα της M κάνει τα εξής:

1. Η S σαρώνει την ταινία της για να εντοπίσει τα k σύμβολα (ένα για κάθε ταινία) που διαβάζει η M.
2. Η S κάνει ένα δεύτερο σάρωμα για να αλλάξει τοπικά την ταινία της σύμφωνα με τις επιταγές της συνάρτησης μετάβασης της M.

Αν σε μία από τις k ταινίες η M χρειαστεί να προσπελάσει καινούργια (αχρησιμοποίητα) τετράγωνα η S πρέπει να μετακινήσει αντίστοιχα τα ειδικά διαχωριστικά σύμβολα της ταινίας της που σημαίνουν τα όρια μεταξύ των ζωνών.