

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ
ΠΡΩΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2015-2016
ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΗ: 21 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2015
ΠΑΡΑΔΟΣΗ: 03 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2015, ΩΡΑ 13:00

Η ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΚΑΙ Η ΩΡΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΕΣ. Μπορείτε να παραδώσετε και σε ομάδες των δύο.

Είναι χρήσιμο να συζητάτε μεταξύ σας τα προβλήματα. Το γράψιμο των απαντήσεων πρέπει να είναι αυστηρά υπόθεση της κάθε ομάδας. Η αναζήτηση των λύσεων στη βιβλιογραφία θα θεωρηθεί αντιγραφική.

DOA: D. P. Williamson, D. B. Shmoys, *The Design of Approximation Algorithms*, Cambridge University Press, 2011.

Πρόβλημα 1 [4 μονάδες]. Άσκηση 2.2 (Longest Processing Time first (LPT)) από DOA. Βρείτε παράδειγμα που δείχνει ότι η ανάλυση του αλγορίθμου δεν βελτιώνεται κάτω από το $4/3 - o(1)$.

Πρόβλημα 2 [3 μονάδες]. Άσκηση 1.2 (Directed Steiner Tree) από DOA.

Πρόβλημα 3 [4 μονάδες]. Έστω N ένα πεπερασμένο σύνολο και $f : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$. Αποδείξτε με βάση τον ορισμό πως η f είναι submodular αν και μόνο αν

$$f(S \cup \{j\}) - f(S) \geq f(S \cup \{j, k\}) - f(S \cup \{k\}) \text{ για } k, j \in N, k \neq j, \text{ και } S \subseteq N \setminus \{j, k\}.$$

Πρόβλημα 4 [6 μονάδες]. Θεωρήστε το παρακάτω γραμμικό πρόγραμμα (DLP).

$$\begin{aligned} \text{(DLP)} \quad & \min \sum_{u, v \in V, u \neq v} d_{uv} x_{uv} \\ \text{(3.6)} \quad & x(\delta(S)) + y(S) \geq \begin{cases} 2 & \text{if } \hat{v} \notin S, \\ 0 & \text{if } \hat{v} \in S, \end{cases} \quad \text{for all } S \subseteq V, \\ & y(V) = 0, \\ & x_{uv} \geq 0 \quad \text{for all } u, v \in V, u \neq v, \\ & y_v \text{ unrestricted} \quad \text{for all } v \in V. \end{aligned}$$

(i) Αποδείξτε πως είναι μια έγκυρη γραμμική χαλάρωση (valid linear relaxation) του Minimum Spanning Tree προβλήματος στο μη κατευθυνόμενο πλήρες γράφημα $G = (V, E)$ όπου d_{uv} είναι το μήκος της ακμής $\{u, v\}$. (Το ζεύγος uv δεν είναι διατεταγμένο· έχουμε τόσες x -μεταβλητές όσες και ακμές στο E .) Το \hat{v} είναι ένας αυθαίρετα επιλεγμένος κόμβος από το V . Με $\delta(S)$ συμβολίζουμε τις ακμές που έχουν ακριβώς ένα άκρο στο S .

Valid relaxation σημαίνει πως για κάθε spanning tree του G με συνολικό κόστος C υπάρχει μια ακέραιη λύση του (DLP) με κόστος ακριβώς C .

(ii) Γράψτε το δυϊκό του (DLP).

Πρόβλημα 5 [4 μονάδες]. Άσκηση 2.11 (Maximum Coverage) από DOA.

Πρόβλημα 6 [6 μονάδες]. Άσκηση 2.12 (Μητροειδή) από DOA.

Πρόβλημα 7 [3 μονάδες]. Άσκηση 2.14 (Edge-Disjoint Paths) από DOA.

Πρόβλημα 8 [4 μονάδες]. Άσκηση 5.2 (Max Cut) από DOA.