Πανεπιστημιο Αθηνων, Θεωρια Γραμμικου Προγραμματισμου
Πρωτο Συνολο Ασκησεων, χειμερινο εξαμηνο 2016-2017
Δημοσιευση: 19 Οκτωβριου 2016
Παραδοση: 26 Οκτωβριου 2016, ωρα 15:00

Η ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΚΑΙ Η ΩΡΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΕΣ. **Μπορείτε να παραδώσετε τις ασκήσεις ατομικά ή σε ομάδες των δύο**. Είναι χρήσιμο να συζητάτε μεταξύ σας τα προβλήματα. Το γράψιμο των απαντήσεων πρέπει να είναι αυστηρά υπόθεση της κάθε ομάδας.

Πρόβλημα 0 [2 μονάδες]. Δείξτε πως κάθε πολύεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ έχει ισοδύναμη αναπαράσταση σε πρότυπη μορφή.

Πρόβλημα 1 [3 μονάδες]. Αποδείξτε πως τα διανύσματα $x_1, \ldots, x_t \in \mathbb{R}^n$ είναι αφινικά ανεξάρτητα ανν τα διανύσματα $\binom{x_1}{1}, \ldots, \binom{x_t}{1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Πρόβλημα 2 [5 μονάδες]. (i) Αποδείξτε πως τα διανύσματα $x_1, \ldots, x_t \in \mathbb{R}^n$ είναι αφινικά ανεξάρτητα ανν τα διανύσματα $x_2 - x_1, \ldots, x_t - x_1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
(ii) Έστω t το μέγιστο πλήθος αφινικά ανεξάρτητων διανυσμάτων στο πολύεδρο $P = \{x \mid Ax = b\}$, $P \neq \varnothing$, και d το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων στο πολύεδρο $\{x \mid Ax = 0\}$. Δείξτε ότι $t = d + 1$.

Πρόβλημα 3 [6 μονάδες]. Από το βιβλίο D. Bertsimas, J. Tsitsiklis, "Introduction to Linear Optimization", Athena Scientific, 1997, Ασκήσεις 1.14(α) και 1.16 (σελ. 36 και 37).

Πρόβλημα 4 [3 μονάδες]. Δίνονται δύο αναπαραστάσεις $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \geq b_i,\ i = 1, \ldots, m\}$ και $\{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i^T x \geq c_i,\ i = 1, \ldots, k\}$ του ίδιου μη κενού πολυέδρου P. Εάν $\mathrm{span}(\{a_1, \ldots, a_m\}) = \mathbb{R}^n$, δείξτε ότι και $\mathrm{span}(\{h_1, \ldots, h_k\}) = \mathbb{R}^n$.

Πρόβλημα 5 [6 μονάδες]. Θεωρήστε το πολύεδρο σε πρότυπη μορφή $\{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$. Υποθέτουμε ότι οι γραμμές του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
(i) Αν δύο διαφορετικές βάσεις οδηγούν στην ίδια βασική λύση, δείξτε ότι αυτή η βασική λύση είναι εκφυλισμένη.
(ii) Δίνεται μια εκφυλισμένη βασική λύση. Αληθεύει ότι αντιστοιχεί πάντα σε δύο διακεκριμένες βάσεις;

Πρόβλημα 6 [6 μονάδες]. Θεωρήστε το πολύεδρο σε πρότυπη μορφή $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$. Υποθέτουμε ότι οι m γραμμές του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες και ότι όλες οι βασικές εφικτές λύσεις είναι μη εκφυλισμένες. Έστω x ένα στοιχείο του P που έχει ακριβώς m θετικές συνιστώσες.

Δείξτε ότι το x είναι βασική εφικτή λύση.

Αν υπάρχουν βασικές εφικτές λύσεις που είναι εκφυλισμένες, η πρόταση δεν ισχύει. Γιατί;

Πρόβλημα 7 [5 μονάδες]. Θεωρήστε το πολύεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \geq b_i,\ i = 1, \ldots, m\}$. Δίνονται οι γειτονικές βασικές εφικτές λύσεις u και v. Χβτγ, υποθέτουμε ότι και στις δύο λύσεις είναι ενεργοί οι $n-1$ γραμμικά ανεξάρτητοι περιορισμοί $a_i^T x \geq b_i$, $i = 1, \ldots, n-1$. Έστω $L = \{\lambda u + (1-\lambda)v \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ το τμήμα που ενώνει τις u και v, δηλαδή το L είναι *ακμή* του P. Δείξτε ότι $L = \{x \in P \mid a_i^T x = b_i,\ i = 1, \ldots, n-1\}$.