Πανεπιστημιο Αθηνων, Θεωρια Γραμμικου Προγραμματισμου
Δευτερο Συνολο Ασκησεων, χειμερινο εξαμηνο 2016-2017
Δημοσιευση: 09 Νοεμβριου 2016
Παραδοση: 16 Νοεμβριου 2016, ωρα 15:00

Η ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΚΑΙ Η ΩΡΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΕΣ. **Μπορείτε να παραδώσετε τις ασκήσεις ατομικά ή σε ομάδες των δύο**. Είναι χρήσιμο να συζητάτε μεταξύ σας τα προβλήματα. Το γράψιμο των απαντήσεων πρέπει να είναι αυστηρά υπόθεση της κάθε ομάδας.

Πρόβλημα 1 [4 μονάδες]. Δείξτε ότι το δυϊκό του γραμμικού προγράμματος

$$\begin{aligned} \min\ & b^T y \\ & A^T y = 0 \\ & e^T y = 1 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

όπου $e = (1, 1, \ldots, 1)^T$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε εφικτή λύση στο $Ax \leq b$.

Πρόβλημα 2 [4 μονάδες]. Δίνεται αντισυμμετρικός πίνακας A, δηλ. $A^T = -A$. Δείξτε ότι το παρακάτω γραμμικό πρόγραμμα είναι το δυϊκό του εαυτού του.

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & Ax \geq -c \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Αν το x^* είναι βέλτιστη λύση για το παραπάνω γραμμικό πρόγραμμα, ποια είναι η τιμή του $c^T x^*$; Γιατί;

Πρόβλημα 3 [4 μονάδες]. Αποδείξτε την ακόλουθη πρόταση. Το σύστημα $Ax \leq b$ έχει λύση $x \geq 0$, αν και μόνο αν $y^T b \geq 0$, για κάθε $y \geq 0$ που ικανοποιεί $y^T A \geq 0$.

Πρόβλημα 4 [6 μονάδες]. (i) [1 μονάδα] Δείξτε πως το Λήμμα του Farkas για εξισώσεις που δείξαμε στην τάξη συνεπάγεται την πρόταση: «Αν ένα σύστημα εξισώσεων με μη αρνητικές μεταβλητές είναι ανέφικτο, υπάρχει γραμμικός συνδυασμός των εξισώσεων που είναι εξίσωση ανέφικτη για μη αρνητικές μεταβλητές».
(ii) [5 μονάδες] Δείξτε ότι είτε υπάρχει x τ.ω. $Ax = 0$, $x > 0$, είτε υπάρχει π τ.ω. $0^T \neq \pi^T A \geq 0^T$. Η διάζευξη νοείται ως αποκλειστική.

Πρόβλημα 5 [4 μονάδες]. Δίνεται πολύεδρο P και ο χαρακτηριστικός του κώνος $\mathrm{rec}(P)$. Να αποδειχθούν οι τέσσερεις ιδιότητες που δώσαμε στην τάξη ως απόρροια του ορισμού.

Πρόβλημα 6 [3 μονάδες]. «Για κάθε κώνο C, $\dim(C) = \dim(C^*)$, όπου C^* ο δυϊκός κώνος». Αληθές ή ψευδές; Δικαιολογήστε την απάντηση σας.