Διάλεξη 3: 15.10.2014 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος
Γραφείς: Κατερίνα Δρόσου, Γιώργος Παπαδημητρίου & Σ. Κ.

3.1 Αλγεβρικός ορισμός ακραίων σημείων

Έστω ένα σύνολο $P \subseteq \mathbb{R}^n$ που ορίζεται από το σύστημα

$$a_i^T x \geq b_i, \ \ i \in M_1$$
$$a_i^T x \leq b_i, \ \ i \in M_2$$
$$a_i^T x = b_i, \ \ i \in M_3$$

όπου τα M_1, M_2, M_3 είναι πεπερασμένα σύνολα δεικτών.

Ορισμός 3.1 *Αν $x^* \in \mathbb{R}^n$ ικανοποιεί τον περιορισμό $a_i^T x^* = b_i$ για κάποιο $i \in M_1 \dot{\cup} M_2 \dot{\cup} M_3$, ο αντίστοιχος περιορισμός καλείται* ενεργός (active) *στο x^*.*

Θεώρημα 3.1 *Έστω $x^* \in \mathbb{R}^n$ και το σύνολο $I = \{i \in M_1 \dot{\cup} M_2 \dot{\cup} M_3 \mid a_i^T x^* = b_i\}$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. *Στο σύνολο $\{a_i \mid i \in I\}$ περιέχονται n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.*
2. *Ο γραμμικός υπόχωρος $\text{span}(\bigcup_{i \in I}\{a_i\})$ είναι όλο το $\mathbb{R}^n$.*
3. *Το σύστημα $a_i^T x = b_i$, $i \in I$, έχει μοναδική λύση.*

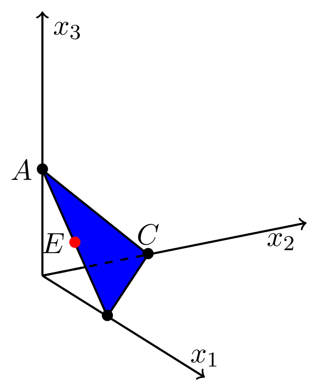
Απόδειξη. Η ισοδυναμία των (1) και (2) είναι προφανής. Θα δείξουμε την ισοδυναμία (2)$\Leftrightarrow$(3).

Αν δεν ισχύει η (3) τότε δεν ισχύει η (2). Πράγματι, αν το σύστημα έχει λύσεις τις x^1, x^2 με $x^1 \neq x^2$, ορίζουμε $d := x^1 - x^2$. Αφού $a_i^T(x^1 - x^2) = 0$, $\forall i \in I$, προκύπτει ότι $d \perp a_i, \forall i \in I$. Άρα $d \notin \text{span}(\bigcup_{i \in I}\{a_i\})$.

Αν δεν ισχύει η (2) τότε δείχνουμε ότι δεν ισχύει η (3). Αν $\text{span}(\bigcup_{i \in I}\{a_i\}) \subset \mathbb{R}^n$, διαλέγουμε $d \neq 0$ κάθετο στον υπόχωρο, δηλ. στοιχείο από το ορθογώνιο συμπλήρωμα (orthogonal complement). Υπάρχει $\hat{x}$ τ. ώ. $a_i^T \hat{x} = b_i$, $\forall i \in I$. Συνεπώς και $a_i^T(\hat{x} + d) = b_i$, $\forall i \in I$. Δηλαδή το συστημα έχει πολλαπλές λύσεις, άρα δεν ισχύει το (3). ∎

Ακολουθώντας την καθιερωμένη ορολογία θα λέμε ότι *οι περιορισμοί $a_i^T x \leq b$, $i \in I$, είναι γραμμικά ανεξάρτητοι*, αν τα αντίστοιχα διανύσματα συντελεστών a_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παράδειγμα για την έννοια του ενεργού περιορισμού [1]:

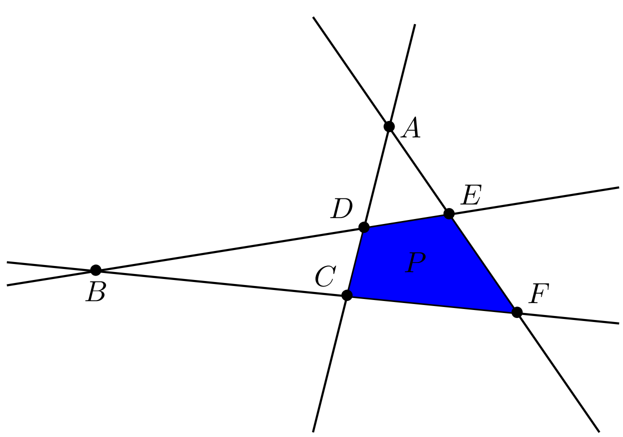


Έστω το πολύεδρο του σχήματος, $P = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1$ με $x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$. Στο σημείο C έχουμε 3 ενεργούς περιορισμούς: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_1 = 0$ και $x_3 = 0$. Στο σημείο E έχουμε 2 ενεργούς περιορισμούς: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ και $x_2 = 0$.

Ορισμός 3.2 *Έστω πολύεδρο $P \subseteq \mathbb{R}^n$ που ορίζεται από ισότητες και ανισότητες και $x^* \in \mathbb{R}^n$.*

1. *Το σημείο x^* καλείται* βασική λύση (β.λ.) *αν*
   (α΄) *όλες οι ισότητες είναι ενεργές στο x^*.*
   (β΄) *από όλους τους ενεργούς περιορισμούς, n εξ αυτών είναι γραμμικά ανεξάρτητοι.*
2. *Το σημείο x^* καλείται* βασική εφικτή λύση (β.ε.λ.) *αν είναι βασική και επιπλέον $x^* \in P$.*

Παράδειγμα 3.1 (Πηγή: [1]) *Στο Σχήμα 3.1 τα A, B, C, D, E, F είναι β.λ. ενώ (μόνο) τα C, D, E, F β.ε.λ.*



Σχήμα 3.1: Παράδειγμα από [1] για β.λ. και β.ε.λ.

Θεώρημα 3.2 *Έστω ένα πολύεδρο $P \subseteq \mathbb{R}^n$, με $P \neq \emptyset$ και $x^* \in P$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. *x^* είναι κορυφή του P*
2. *x^* είναι ακραίο σημείο του P.*
3. *x^* είναι β.ε.λ.*

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το P ορίζεται από περιορισμούς της μορφής $a_i^T x \geq b_i$ και $a_i^T x = b_i$.

(1) $\Rightarrow$ (2)

Έστω x^* κορυφή του P. Υπάρχει $c \in \mathbb{R}^n$ τ.ω. $c^T x^* < c^T y$, $\forall y \in P$ με $y \neq x$. Θεωρούμε $y \in P$, $z \in P$, $y \neq x^*$, $z \neq x^*$ και $0 \leq \lambda \leq 1$. Θα δείξουμε ότι το x^* δεν μπορεί να είναι κυρτός συνδυασμός των y, z.

$$\left.\begin{array}{l} c^T x^* < c^T y \\ c^T x^* < c^T z \end{array}\right\} \Rightarrow c^T x^* < c^T(\lambda y + (1-\lambda) z) \Rightarrow x^* \neq \lambda y + (1-\lambda) z.$$

Άρα το x^* ακραίο σημείο.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Έστω $x^* \in P$ που δεν είναι β.ε.λ. Θα δείξουμε ότι δεν είναι ακραίο σημείο. Θεωρούμε το σύνολο $I = \{i \mid a_i^T x^* = b_i\}$. Αφού x^* δεν είναι β.ε.λ., $\mathrm{span}(\{a_i \mid i \in I\}) \subset \mathbb{R}^n$. Τότε θα υπάρχει $d \in \mathbb{R}^n$ με $d \neq 0$ τ. ώ. $a_i^T d = 0, \forall i \in I$. Έστω $\epsilon > 0$. Ορίζουμε $y := x^* + \epsilon d$ και $z := x^* - \epsilon d$. Μιας και $x^* = \frac{y+z}{2}$, το x^* είναι κυρτός συνδυασμός των y και z. Αρκεί να δείξουμε ότι τα δύο αυτά σημεία ανήκουν κι αυτά στο P.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Για τα $i \in I$: $a_i^T y = a_i^T(x^* + \epsilon d) = a_i^T x^* = b_i = a_i^T z$.
Αν $i \notin I$, έχουμε: $a_i^T x^* > b_i$ και $a_i^T y = a_i^T(x^* + \epsilon d) = a_i^T x^* + a_i^T \epsilon d$. Μπορούμε να διαλέξουμε κατάλληλη, μικρή, τιμή για το ϵ, έτσι ώστε $a_i^T y > b_i$. Συγκεκριμένα, αρκεί να ισχύει $\varepsilon |a_i^T d| < a_i^T x^* - b_i$, για $i \notin I$. Με αυτό τον τρόπο παίρνουμε $y \in P$. Ομοίως, αποδεικνύεται ότι και $z \in P$.

(3) $\Rightarrow$ (1)

Έστω x^* β.ε.λ. Ορίζουμε και πάλι το σύνολο $I = \{i \mid a_i^T x^* = b_i\}$. Επίσης έστω $c := \sum_{i \in I} a_i$. Έχουμε

$$c^T x^* = \sum_{i \in I} a_i^T x^* = \sum_{i \in I} b_i \tag{3.1}$$

Επίσης, $\forall x \in P$, ισχύει $a_i^T x \geq b_i$ οπότε

$$c^T x = \sum_{i \in I} a_i^T x \geq \sum_{i \in I} b_i \tag{3.2}$$

Από τις (3.1) και (3.2) προκύπτει ότι η x^* είναι η βέλτιστη λύση στο γραμμικό πρόγραμμα

$$\min\{c^T x \mid x \in P\}. \tag{3.3}$$

Μένει να δείξουμε ότι το x^* είναι η μοναδική λύση του (3.3). Η σχέση (3.2) ισχύει με ισότητα ανν $a_i^T x = b_i, \forall i \in I$ και αφού x^* β.ε.λ., υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητοι ενεργοί περιορισμοί στο x^*. Από το Θεώρημα 3.1 το x^* είναι η μοναδική λύση του συστήματος $a_i^T x = b_i$, $i \in I$. ∎

Πόρισμα 3.1 *Το πολύεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, έχει πεπερασμένο αριθμό β.ε.λ.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό, σε κάθε β.ε.λ. αντιστοιχούν n γραμμικά ανεξάρτητοι περιορισμοί που ικανοποιούνται με ισότητα. Οποιοιδήποτε n τέτοιοι ορίζουν ένα μοναδικό σημείο. Επομένως διαφορετικές βασικές λύσεις αντιστοιχούν σε διαφορετικές n-άδες γραμμικά ανεξάρτητων περιορισμών. Άρα έχουμε το πολύ $\binom{m}{n}$ βασικές εφικτές λύσεις. ∎

Δύο διακεκριμένες β.λ. στο $\mathbb{R}^n$ καλούνται *γειτονικές* αν $n-1$ γραμμικά ανεξάρτητοι περιορισμοί είναι ενεργοί και στις δύο. Στο Σχήμα 3.1 οι β.λ. D, E είναι γειτονικές με τη B και οι A, C γειτονικές με την D. Στο Φυλλάδιο 01 όπου μελετάμε τον Αλγόριθμο Simplex για την επίλυση γραμμικών προγραμμάτων θα δούμε ότι ο αλγόριθμος επισκέπτεται διαδοχικά γειτονικές βασικές εφικτές λύσεις του πολυέδρου των εφικτών λύσεων.

Αν $B \subseteq [m]$ συμβολίζουμε με $A_B \in \mathbb{R}^{|B| \times n}$ τον πίνακα που αποτελείται από τις γραμμές του A οι δείκτες των οποίων βρίσκονται στο B. Αντίστοιχα το διάνυσμα $b_B \in \mathbb{R}^{|B|}$ περιέχει τις γραμμές του b που δεικτοδοτούνται από το B.

Ορισμός 3.3 *Ένα σύνολο δεικτών $B \subseteq [m]$ καλείται* βάση *αν $|B| = n$ και $\text{rank}(A_B) = n$. Αν επιπλέον το διάνυσμα $x = A_B^{-1} b_B$ είναι εφικτή λύση, η B καλείται* εφικτή βάση.

Από το Θεώρημα 3.2 έπεται ότι κάθε κορυφή v του P αντιστοιχεί σε μία βάση B, έτσι ώστε το v είναι η μοναδική λύση του συστήματος $A_B x = b_B$. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε αδιακρίτως τον όρο βάση για να αναφερόμαστε είτε στο σύνολο δεικτών B είτε στον πίνακα A_B.

Αναφορές

[1] D. P. Bertsimas and J. N. Tsitsiklis. *Introduction to Linear Optimization.* Athena Scientific, 1997.