Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 4: 21.10.2014 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Ζακυνθινού Λυδία, Τζιώτης Ισίδωρος, Σ. Κ.

4.1 Βασικές λύσεις σε πολύεδρα πρότυπης μορφής

Θα μελετήσουμε τη μορφή των βασικών λύσεων σε πολύεδρα που βρίσκονται στην πρότυπη μορφή. Υπενθυμίζουμε ότι η πρότυπη μορφή ενός πολυέδρου P ορίζεται ως εξής:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}, \text{ όπου } A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m. \tag{4.1}$$

Υποθέτουμε ότι οι m γραμμές του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες ή ισοδύναμα ο βαθμός του A είναι m, δηλαδή $\text{rank}(A) = m$ (full row rank hypothesis).

Η παραπάνω υπόθεση δεν είναι περιοριστική ως προς τα στιγμιότυπα που εξετάζουμε και αυτό εξασφαλίζεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.1 *Έστω μη κενό πολύεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$, όπου $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ με γραμμές $\alpha_1^T, \alpha_2^T, \ldots, \alpha_m^T$. Έστω, επίσης, $\text{rank}(A) = k < m$ και οι γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές είναι οι $\alpha_{i_1}^T, \alpha_{i_2}^T, \ldots, \alpha_{i_k}^T$. Θεωρούμε πολύεδρο $Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_{i_j}^T x = b_{i_j}, j = 1, \ldots, k, x \geq 0\}$. Τότε $P = Q$.*

Απόδειξη. Ισχύει $P \subseteq Q$ αφού το Q έχει λιγότερους περιορισμούς. Αρκεί να δείξουμε ότι $Q \subseteq P$. Γνωρίζουμε ότι κάθε γραμμή του πίνακα A μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του, δηλαδή

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{i_j} \alpha_{i_j}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}. \tag{4.2}$$

Έστω σημείο $x \in P$. Το x ικανοποιεί τους περιορισμούς του P δηλαδή

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}, \quad b_i = \alpha_i^T x \overset{(4.2)}{=} (\sum_{j=1}^{k} \lambda_{i_j} \alpha_{i_j}^T) x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{i_j} b_{i_j} \tag{4.3}$$

Έστω σημείο $y \in Q$.

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}, \quad \alpha_i^T y = (\sum_{j=1}^{k} \lambda_{i_j} \alpha_{i_j}) y \overset{y \in Q}{=} \sum_{j=1}^{k} \lambda_{i_j} b_{i_j} \overset{(4.3)}{=} b_i$$

Άρα $y \in P$. ∎

Παρατήρηση 4.1 *Προφανώς $m \leq n$ αφού οι m το πλήθος γραμμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$.*

Από την υπόθεση που κάναμε, το $Ax = b$ προμηθεύει m γραμμικά ανεξάρτητους περιορισμούς. Χρειαζόμαστε ακόμα $n - m$ τέτοιους ώστε να ορίσουμε βασική λύση. Δηλαδή τουλάχιστον $n - m$ περιορισμοί από αυτούς της μορφής $x \geq 0$ είναι ενεργοί. Το παρακάτω θεώρημα μας καθοδηγεί ως προς τον τρόπο επιλογής τους.

Θεώρημα 4.2 *Έστω το σύστημα $Ax = b, x \geq 0$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ με $rank(A) = m$.*
Ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ είναι βασική λύση ανν ικανοποιεί την $Ax = b$ και υπάρχουν δείκτες $B(1), \ldots, B(m)$ τέτοιοι ώστε:

(i) Οι στήλες $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

(ii) Αν $i \neq B(1), B(2), \ldots, B(m)$, τότε $x_i = 0$.

Απόδειξη.
$(\Longleftarrow)$
Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ για το οποίο ισχύει $Ax = b$ και έστω δείκτες $B(1), \ldots, B(m)$ που ικανοποιούν τις συνθήκες (i) και (ii). Πρέπει να δείξουμε ότι το x είναι βασική λύση.

Ισχύει $\sum_{i=1}^{m} x_{B(i)} A_{B(i)} \overset{(ii)}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i A_i = Ax = b$ όπου η τελευταία ισότητα ισχύει από την υπόθεση.

Αφού οι στήλες $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες (συνθήκη (i)), ο τετραγωνικός πίνακας που σχηματίζουν είναι αντιστρέψιμος. Επομένως, τα $x_{B(i)}$ για $i = 1, \ldots, m$ είναι μοναδικά. Επιπλέον, λόγω της συνθήκης (ii), και τα υπόλοιπα x_i ορίζονται μοναδικά. Επομένως, υπάρχουν n ενεργοί περιορισμοί των οποίων το σύστημα έχει μοναδική λύση. Άρα από Θεώρημα 3.1 οι n αυτοί ενεργοί περιορισμοί είναι γραμμικά ανεξάρτητοι, δηλαδή το x είναι βασική λύση αφού ικανοποιεί και τις δύο συνθήκες του Ορισμού 3.2.

$(\Longrightarrow)$
Έστω x βασική λύση. Τότε προφανώς από τον ορισμό θα ικανοποιεί τους περιορισμούς ισότητας, δηλαδή $Ax = b$. Πρέπει ακόμα να δείξουμε ότι υπάρχουν δείκτες $B(1), \ldots, B(m)$ που ικανοποιούν τις συνθήκες (i) και (ii).

Έστω $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(k)}$ οι μη μηδενικές συνιστώσες του x. Αφού η x είναι βασική λύση, από τους ενεργούς περιορισμούς $\sum_{i=1}^{n} x_i A_i = b$ και ($x_i = 0$ για $i \neq B(1), \ldots, B(k)$) τουλάχιστον n είναι γραμμικά ανεξάρτητοι άρα το σύστημα των $m + (n - k)$ εξισώσεων που φτιάχνουν οι ενεργοί περιορισμοί έχει μοναδική λύση (βλ. Θεώρημα 3.1). Άρα το σύστημα $\sum_{i=1}^{k} x_{B(i)} A_{B(i)} = b$ έχει μοναδική λύση.

Ισχυρισμός 4.1 *Οι στήλες $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(k)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.*

Απόδειξη ισχυρισμού. Έστω ότι δεν είναι. Τότε υπάρχουν συντελεστές $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ όχι όλοι μηδέν τέτοιοι ώστε $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_{B(i)} = 0$. Άρα $\sum_{i=1}^{k} (x_{B(i)} + \lambda_i) A_{B(i)} = b + 0 = b$ άρα το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση. Άτοπο. ∎

Ισχύει λοιπόν $k \leq m$, αφού οι k γραμμικά ανεξάρτητες στήλες είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ επομένως δεν μπορεί να είναι περισσότερες από m το πλήθος. Όμως ο A έχει m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες λόγω της full rank hypothesis και του βασικού θεωρήματος της άλγεβρας ότι το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών ενός πίνακα είναι ίσο με το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών. Από το Λήμμα του Steinitz υπάρχουν $m-k$ πρόσθετες στήλες $A_{B(k+1)}, \ldots, A_{B(m)}$ τέτοιες ώστε οι $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(k)}, A_{B(k+1)}, \ldots, A_{B(m)}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Δηλαδή ισχύει η συνθήκη (i) για αυτούς του δείκτες.

Επίσης ισχύει $x_i = 0$ για $i \neq B(1), \ldots, B(m)$ αφού το $x_i = 0$ για $i \neq B(1), \ldots, B(k)$ και $k \leq m$. Δηλαδή, ισχύει και η συνθήκη (ii). ∎

Ένας, όχι απαραίτητα αποδοτικός, αλγόριθμος για την εύρεση όλων των βασικών λύσεων, άρα και των κορυφών, ενός πολυέδρου σε πρότυπη μορφή, θα δοκίμαζε κάθε ένα από τα $\binom{n}{m}$ m-σύνολα στηλών του πίνακα A. Αν οι επιλεγμένες στήλες $B(1), \ldots, B(m)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, η λύση x του συστήματος $\sum_{i=1}^{m} x_{B(i)} A_{B(i)} = b$ είναι βασική λύση. Αν επιπλέον $x \geq 0$, τότε έχουμε βασική εφικτή λύση.

4.2 Βάση και βασικές μεταβλητές

Στην ενότητα αυτή εξειδικεύουμε τον ορισμό της βάσης (Ορισμός 3.3) στα γραμμικά πρόγραμματα ορισμένα σε ένα πολύεδρο P που βρίσκεται στην πρότυπη μορφή (4.1).

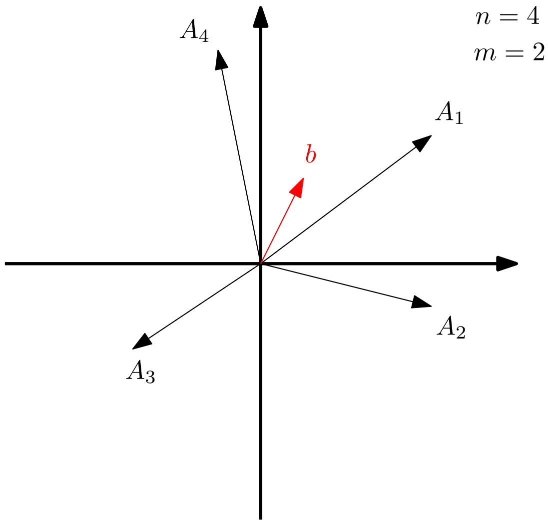
Ορισμός 4.1 *Αν x είναι μια βασική λύση, οι μεταβλητές $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$ του Θεωρήματος 4.2 ονομάζονται* βασικές *(basic) ενώ οι υπόλοιπες* μη βασικές *(non-basic).*

Ορισμός 4.2 *Ένας πίνακας B που σχηματίζεται από m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A ονομάζεται* βάση *(basis) ή* βασικός πίνακας *(basis matrix). Εάν το διάνυσμα $x^* = B^{-1}b \in P$, δηλαδή το x^* είναι εφικτή λύση, ο πίνακας B καλείται* εφικτή βάση.

Από το Θεώρημα 4.2, σε κάθε βασική λύση x^* αντιστοιχεί μία βάση B. Παρατηρούμε ότι μια εφικτή βάση όπως ορίστηκε στον Ορισμό 4.2, σε συνδυασμό με το Θεώρημα 4.2(ii) ορίζει n γραμμικά ανεξάρτητους περιορισμούς που ικανοποιούνται με ισότητα. Άρα οι Ορισμοί 4.2 και 3.3 είναι συμβατοί.

Παρατήρηση 4.2 *Ισχύει η ισοδυναμία $\exists x(Ax = b \wedge x \geq 0) \iff b \in \operatorname{cone}(A_1, \ldots, A_n)$.*
Οι συντεταγμένες x_i παίζουν το ρόλο των συντελεστών λ_i του αντίστοιχου κωνικού συνδυασμού.

Παράδειγμα 4.1 *Στο Σχήμα 4.1 η βάση περιλαμβάνει $m = 2$ στήλες. Με χρήση της Παρατήρησης 4.2 συμπεραίνουμε ότι μόνο οι βάσεις $\{A_1, A_4\}$ και $\{A_2, A_4\}$ δίνουν βασικές εφικτές λύσεις γιατί το b ανήκει στο κωνικό τους κάλυμμα. Όλες οι υπόλοιπες (εκτός της $\{A_1, A_3\}$ που δε χρησιμεύει για βάση γιατί τα διανύσματα είναι συγγραμμικά) δίνουν μη εφικτές βασικές λύσεις.*



Σχήμα 4.1: Επιλογή βάσεων που δίνουν εφικτές λύσεις