

Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 7: 04.11.2014

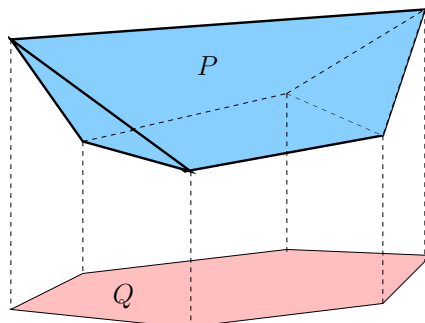
Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Ζυγομήτρος Ευάγγελος, Μπάκας Δημήτριος, Σ. Κ.

7.1 Εφαρμογές της απαλοιφής Fourier - Motzkin

Δεδομένου ενός συνόλου $S \subseteq \mathbb{R}^n$ και ενός γραμμικού υπόχωρου L του \mathbb{R}^n , η *ορθογώνια προβολή* του S επί του L είναι το σύνολο των σημείων $u \in L$ για τα οποία υπάρχει $v \perp L$, $v \in \mathbb{R}^n$, έτσι ώστε $u + v \in S$. Μας ενδιαφέρουν ορθογώνιες προβολές επί του $L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = 0, i \in [n] \setminus M\}$ όπου $M \subseteq [n]$. Συμβολίζουμε με $\text{proj}_x(S)$ το σύνολο

$$\{x \in \mathbb{R}^M \mid \exists z \in \mathbb{R}^{[n] \setminus M} \text{ τ. ώ. } \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in S\}.$$



Σχήμα 7.1: Το Q είναι η προβολή του $P \subseteq \mathbb{R}^3$ στο επίπεδο, δηλ. στον υπόχωρο $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$.

Έστω το πολύεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Αν με έναν γύρο του αλγορίθμου Fourier - Motzkin απαλείψουμε τη μεταβλητή x_1 , θα έχουμε υπολογίσει μια αναπαράσταση του συνόλου $\text{proj}_{x'}(P)$ όπου $x'^T = (x_2, \dots, x_n)$. Γενικά, η απαλοιφή Fourier - Motzkin μπορεί να υπολογίσει την προβολή του αρχικού πολυέδρου σε οποιοδήποτε υποσύνολο των μεταβλητών. Έχουμε αποδείξει λοιπόν κατασκευαστικά το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 7.1 Έστω πολύεδρο $P \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ όπου $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \mid Ax + Bz \leq b \right\}$. Το σύνολο $\text{proj}_x(P)$ είναι επίσης πολύεδρο.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι ένας αφινικός μετασχηματισμός ενός πολυέδρου είναι επίσης πολύεδρο.

Θεώρημα 7.2 Έστω πολύεδρο $P \subseteq \mathbb{R}^n$, πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^m$. Το σύνολο $Q = \{Ax + b \mid x \in P\}$ είναι επίσης πολύεδρο.

Απόδειξη. Γράφουμε $Q = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n : Ax + b = y, x \in P\}$. Τότε $Q = \text{proj}_y \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid Ax + b = y, x \in P\}$. Από το Θεώρημα 7.1, το Q είναι πολύεδρο. ■

Ας δούμε μια άλλη απλή εφαρμογή της απαλοιφής Fourier-Motzkin. Θεωρούμε το γραμμικό πρόγραμμα $\min\{c^T x \mid Ax \leq b\}$ και το σύνολο T των τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης στις εφικτές λύσεις:

$$T = \{t \in \mathbb{R} \mid \exists x: c^T x = t, Ax \leq b\}.$$

Από Fourier-Motzkin το σύνολο T είναι πολύεδρο που ορίζεται από ένα πεπερασμένο σύστημα (μη αυστηρών!) γραμμικών ανισοτήτων με μόνη μεταβλητή την t . Ανάλογα με τη μορφή αυτού του συστήματος συμπεραίνουμε άμεσα ότι υπάρχουν οι εξής δυνατότητες για το T :

1. $T = \emptyset$. Δηλ. το γραμμικό πρόγραμμα είναι ανέφικτο.
2. Το T είναι μη κενό και μη φραγμένο από κάτω, δηλ. είναι της μορφής $\{t \in \mathbb{R} \mid -\infty \leq t \leq b\}$ με $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Άρα το γραμμικό πρόγραμμα είναι εφικτό και μη φραγμένο.
3. Το T είναι μη κενό και φραγμένο από τα κάτω, δηλ. είναι της μορφής $\{t \in \mathbb{R} \mid a \leq t \leq b\}$ με $a \in \mathbb{R}$ και $a \leq b \leq +\infty$. Άρα το γραμμικό πρόγραμμα είναι εφικτό και φραγμένο και υπάρχει εφικτή λύση x τ. ώ. $c^T x = \inf\{c^T x \mid Ax \leq b\} = a$.

Τα παραπάνω τα γνωρίζαμε ήδη από το Πόρισμα 6.1, αλλά η απόδειξη μέσω Fourier-Motzkin είναι εξαιρετικά απλή.

*7.2 Επεκταμένες Διατυπώσεις

Το Θεώρημα 7.1 μας έδωσε ότι ένα σύνολο $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ της μορφής

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists z \in \mathbb{R}^k : Ax + Bz \leq b\}$$

είναι πολύεδρο.

Συμβαίνει για κάποια πολύεδρα η περιγραφή τους σε έναν χώρο με επιπλέον, βοηθητικές, μεταβλητές να είναι απλούστερη από την αρχική, δηλ. μικρότερου μεγέθους. Σε αυτή την περίπτωση η πορεία μας είναι αντίστροφη. Εκκινούμε από ένα σύνολο X και ψάχνουμε να βρούμε αναπαράσταση του σε χώρο μεγαλύτερης διάστασης.

Ορισμός 7.1 Αν

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \mid Ax + Bz \leq b \right\}$$

και $\text{proj}_x(P) = X$, λέμε ότι το σύστημα $Ax + Bz \leq b$ που ορίζει το P είναι μια επεκταμένη διατύπωση (extended formulation) για το σύνολο X .

Ας πάρουμε ως παράδειγμα το σύνολο $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1\}$. A priori δεν είναι προφανές ότι το X είναι πολύεδρο. Με λίγη σκέψη βλέπουμε όμως ότι

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \leq 1, \forall (\epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq n)\}, \quad (7.1)$$

Άρα το X είναι πολύεδρο. Η αναπαράσταση (7.1) περιέχει 2^n ανισότητες και μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε μία από αυτές είναι απαραίτητη. Χρησιμοποιώντας επιπλέον μεταβλητές βρίσκουμε ότι

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists z \in \mathbb{R}^n: -z_i \leq x_i \leq z_i, 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^n z_i \leq 1\}. \quad (7.2)$$

Άρα υπάρχει επεκταμένη διατύπωση για το X με $2n$ μεταβλητές και μόλις $2n + 1$ ανισότητες.

7.3 Λήμματα Farkas

Εστω $y \in \mathbb{R}^m$ και $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων $y^T A = c^T$ με $c \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{ccc} \boxed{y^T} & \boxed{A} & = \boxed{c^T} \\ (1 \times m) & (m \times n) & (1 \times n) \end{array}$$

Ισχύει ότι $y^T A = [y^T A_1, y^T A_2, \dots, y^T A_n]$ όπου $A_j, j \in [n]$, η j -οστή στήλη του πίνακα A . Επομένως:

$$y^T A x = (y_1 A_{11} + y_2 A_{21} + \dots + y_m A_{m1})x_1 + (y_1 A_{12} + y_2 A_{22} + \dots + y_m A_{m2})x_2 + \dots + (y_1 A_{1n} + y_2 A_{2n} + \dots + y_m A_{mn})x_n.$$

Εναλλακτικά, το $y^T A$ ορίζει γραμμικό συνδυασμό των γραμμών του A , δηλ. $y^T A = \sum_{i=1}^m y_i a_i^T$, όπου $a_i^T, i \in [m]$, η i -οστή γραμμή του πίνακα A . Άρα, για $y \geq 0$, η ανισότητα $y^T A x \leq y^T b$ είναι κωνικός συνδυασμός των m ανισοτήτων $Ax \leq b$.

Θεώρημα 7.3 (Λήμμα Farkas για ανισότητες) Το σύστημα $Ax \leq b$ έχει λύση αν \nexists διάνυσμα $y \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $y \geq 0, y^T A = 0^T, y^T b < 0$.

Παρατήρηση 7.1 Ισοδύναμο το Θεώρημα 7.3 μας λέει το εξής. Το σύστημα $Ax \leq b$ έχει λύση αν για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $y \geq 0$ και $y^T A = 0^T$ ισχύει ότι $y^T b \geq 0$.

Απόδειξη. Ευθύ \implies : Υποθέτουμε πως $\exists \tilde{x}, A\tilde{x} \leq b$. Έστω ότι $\exists \tilde{y} \geq 0$ τέτοιο ώστε $\tilde{y}^T A = 0^T$ και $\tilde{y}^T b < 0$. Τότε, έχουμε $0 > \tilde{y}^T b \geq \tilde{y}^T (A\tilde{x}) = (\tilde{y}^T A)\tilde{x} = 0$. Άτοπο.

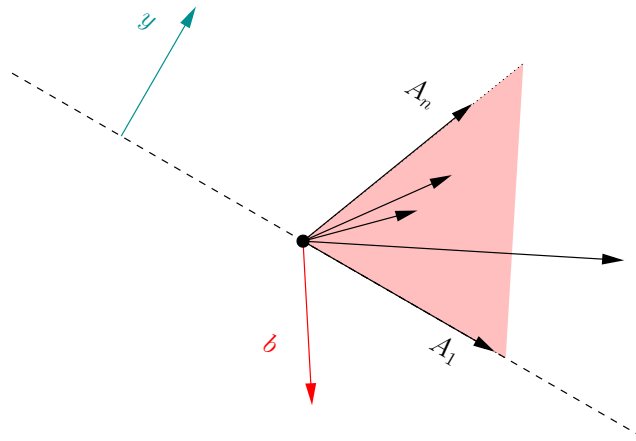
Αντίστροφο \longleftarrow : Έστω ότι το σύστημα $Ax \leq b$ δεν έχει λύση. Εφαρμόζοντας απαλοιφή Fourier-Motzkin, απαλείφουμε όλες τις μεταβλητές x_1, \dots, x_n και καταλήγουμε σε ένα ισοδύναμο ανέφικτο σύστημα $A'x \leq b'$. Αφού δεν υπάρχουν μεταβλητές το $A'x \leq b'$ πρέπει να είναι της μορφής $0 \leq b'$. Επειδή είναι ανέφικτο, υπάρχει i τέτοιο ώστε $b'_i < 0$. Από την Παρατήρηση 6.1 κάθε ανισότητα του συστήματος $0 \leq b'$ είναι κωνικός συνδυασμός των ανισοτήτων του αρχικού συστήματος $Ax \leq b$. Επομένως υπάρχει $y \geq 0$, τ. ω. η ανισότητα $0 \leq b'_i$ να ταυτίζεται με την $y^T A x \leq y^T b$. Άρα $y^T A = 0$ και $y^T b = b'_i < 0$. ■

Πόρισμα 7.1 (Λήμμα Farkas για ισότητες, 1894) Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση $x \geq 0$ αν και μόνο αν υπάρχει διάνυσμα $y \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $y^T A \geq 0^T$, $y^T b < 0$.

Ακολουθεί μια γεωμετρική ερμηνεία του Πορίσματος. Παρατηρούμε ότι

$$Ax = b, x \geq 0 \text{ έχει λύση} \Leftrightarrow b \in \text{cone}(A_1, \dots, A_n).$$

Επομένως το σύστημα είναι ανέφικτο αν και μόνο αν υπάρχει ένα υπερεπίπεδο (με normal y) που διαχωρίζει το b από τον κώνο.



Σχήμα 7.2: Το υπερεπίπεδο $\{x \in \mathbb{R}^m \mid y^T x = y^T A_1\}$ διαχωρίζει τον κώνο που παράγουν οι στήλες του A από το b .

Στο Σχήμα 7.2 παρατηρούμε ότι

$$y^T A \geq 0 \Leftrightarrow [y^T A_1, \dots, y^T A_n] \geq 0^T, \text{ ενώ } y^T b < 0.$$

Θα αποδείξουμε το Πόρισμα 7.1 στην επόμενη διάλεξη.