Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 9: 11.11.2014 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Ευάγγελος Αναγνωστόπουλος, Πέτρος Μπαρμπαγιάννης, Σ. Κ.

9.1 Δυϊκότητα (συνέχεια)

Στην προηγούμενη διάλεξη αποδείξαμε το Θεώρημα Ισχυρής Δυϊκότητας, δηλαδή, αν $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^m,\ c \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\max\{c^T x \mid Ax \le b\} = \min\{b^T y \mid y^T A = c^T, y \ge 0\}$$

υπό τη συνθήκη ότι και τα δύο σύνολα είναι μη κενά.

Πόρισμα 9.1 *Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και $y \in \mathbb{R}^m$. Τότε*

$$\max\{c^T x \mid Ax = b,\ x \ge 0\} = \min\{b^T y \mid y^T A \ge c^T\}$$

υπό τη συνθήκη ότι και τα δύο σύνολα είναι μη κενά.

Απόδειξη. Ορίζουμε τα παρακάτω:

$$\widetilde{A} := \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{b} := \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Τότε ισχύει ότι $\max\{c^T x \mid Ax = b,\ x \ge 0\} = \max\{c^T x \mid \widetilde{A}x \le \widetilde{b}\}$. Από το Θεώρημα Ισχυρής Δυϊκότητας $\max\{c^T x \mid \widetilde{A}x \le \widetilde{b}\} = \min\{\widetilde{b}^T y \mid y^T \widetilde{A} = c^T,\ y \ge 0,\ y \in \mathbb{R}^{2m+n}\}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η τελευταία ποσότητα ισούται με $\min\{b^T y \mid y^T A \ge c^T,\ y \in \mathbb{R}^m\}$. ∎

Το πόρισμα υποδεικνύει πώς μπορούμε να γράψουμε άμεσα το δυϊκό ενός γραμμικού προγράμματος που περιέχει και εξισώσεις. Στο δυϊκό αυτές αντιστοιχούν σε *ελεύθερες* μεταβλητές, δηλ. μεταβλητές χωρίς περιορισμό στο πρόσημο. Εύκολα βλέπει επίσης κανείς ότι το δυϊκό του δυϊκού μας δίνει το πρωτεύον. Ο παρακάτω ορισμός συνοψίζει τη «συντακτική» μετάβαση από ένα γραμμικό πρόγραμμα στο δυϊκό του και εξασφαλίζει ότι τηρείται η Ισχυρή Δυϊκότητα. Οι διαστάσεις των πινάκων και διανυσμάτων παραλείπονται.

Ορισμός 9.1 *Δοθέντος του παρακάτω γραμμικού προγράμματος*

$$\begin{aligned} \max\ & c_1^T x_1 + c_2^T x_2 + c_3^T x_3 \\ & A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 \le b_1 \\ & A_4 x_1 + A_5 x_2 + A_6 x_3 \ge b_2 \\ & A_7 x_1 + A_8 x_2 + A_9 x_3 = b_3 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0 \end{aligned} \tag{GP}$$

το δυϊκό του είναι το ακόλουθο

$$\begin{aligned} \min\ & b_1^T y_1 + b_2^T y_2 + b_3^T y_3 \\ & A_1^T y_1 + A_4^T y_2 + A_7^T y_3 \geq c_1 \\ & A_2^T y_1 + A_5^T y_2 + A_8^T y_3 \leq c_2 \\ & A_3^T y_1 + A_6^T y_2 + A_9^T y_3 = c_3 \\ & y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0 \end{aligned} \tag{GD}$$

9.2 Συμπληρωματική Χαλαρότητα

Θεώρημα 9.1 (Συμπληρωματική Χαλαρότητα) *Έστω x^* εφικτή λύση για το πρωτεύον γραμμικό πρόγραμμα*

$$\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ & Ax \leq b \end{aligned} \tag{P}$$

και y^* εφικτή λύση για το δυϊκό

$$\begin{aligned} \min\ & b^T y \\ & y^T A = c^T \\ & y \geq 0 \end{aligned} \tag{D}$$

Οι x^*, y^* είναι βέλτιστες λύσεις για τα (P) και (D) αντίστοιχα αν και μόνο αν ισχύει ότι, για κάθε i, $y_i^* = 0$ ή $a_i^T x^* = b_i$. Η παραπάνω συνθήκη καλείται συνθήκη συμπληρωματικής χαλαρότητας (complementary slackness condition).

Απόδειξη. Έστω x^*, y^* βέλτιστες λύσεις και για $i \in \{1, \ldots, m\}$, $a_i^T x^* < b_i$. Θα δείξουμε ότι $y_i^* = 0$.

$$\begin{aligned} (y^*)^T b - c^T x^* &= (y^*)^T b - (y^*)^T A x^* \\ &= (y^*)^T (b - Ax^*) \\ &= \sum_{i=1}^{t} y_i^* (b_i - a_i^T x^*) \\ &\geq y_i^* (b_i - a_i^T x^*) \end{aligned}$$

Αν $y_i^* > 0$ τότε $y_i^*(b_i - a_i^T x^*) > 0$, το οποίο όμως είναι άτοπο από το Θεώρημα Ισχυρής Δυϊκότητας.

Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $i \in \{1, \ldots, m\}$, $y_i^* = 0$ ή $a_i^T x^* = b_i$. Τότε

$$\begin{aligned} (y^*)^T b - c^T x^* &= (y^*)^T (b - Ax^*) \\ &= \sum_{i=1}^{m} y_i^* (b_i - a_i^T x^*) = 0 \end{aligned}$$

Επομένως, από το Θεώρημα Ασθενούς Δυϊκότητας οι δύο λύσεις x^*, y^* είναι βέλτιστες. ∎

Ας δούμε μια διαισθητική ερμηνεία της συμπληρωματικής χαλαρότητας. Αν μειώσουμε κάποιες συντεταγμένες του διανύσματος b, η εφικτή περιοχή για το (P) είναι υποσύνολο της προηγούμενης και το βέλτιστο της αντικειμενικής συνάρτησης θα μειωθεί ή θα μείνει το ίδιο. Μπορεί να δειχθεί ότι η τιμή μιας δυϊκής μεταβλητής y_i σε μια βέλτιστη δυϊκή λύση εκφράζει τη λεγόμενη *σκιώδη τιμή* του iστού περιορισμού, δηλ. πόσο μπορεί να μειωθεί το κόστος της βέλτιστης λύσης του πρωτεύοντος ανά μονάδα μείωσης του b_i όταν $b' := b - \delta e_i$. Οι επιτρεπτές τιμές του δ ανήκουν στο λεγόμενο διάστημα ανοχής το οποίο δεν θα ορίσουμε εδώ. Τα παραπάνω αποτελούν αντικείμενο της Ανάλυσης Ευαισθησίας (Sensitivity Analysis) των γραμμικών προγραμμάτων.

Είναι εύλογο διαισθητικά οι περιορισμοί του (P) που δεν είναι ενεργοί να έχουν μηδενική σκιώδη τιμή, αφού με μια απειροστή μείωση του b_i δεν πρέπει να αλλάζει η βέλτιστη λύση, άρα ούτε και η βέλτιστη τιμή. Επαναδιατυπώνουμε υπό το παραπάνω πρίσμα την απόδειξη για το ευθύ του Θεωρήματος 9.1.

Έστω ζευγάρι βέλτιστων λύσεων (x^*, y^*) για τα (P) και (D) και ένας μη ενεργός περιορισμός $i \in [m]$, δηλ. $a_i^T x^* < b_i$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\beta < b_i$ τ. ώ. $Ax^* \le b'$, $b'_k = b_k$, $k \neq i$, και $b'_i = \beta$. Τα διανύσματα x^* και y^* είναι εφικτές λύσεις για τα γραμμικά προγράμματα (P') και (D') αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} &\max c^T x && (P') \\ &Ax \le b' && \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &\min b'^T y && (D') \\ &y^T A = c^T && \\ &y \ge 0 && \end{aligned}$$

Επειδή η εφικτή περιοχή του (P') είναι υποσύνολο της εφικτής περιοχής του (P) (με άλλα λόγια το (P) είναι *χαλάρωση (relaxation)* του (P')), παίρνουμε ότι το x^* είναι βέλτιστη λύση για το (P'). Από Ασθενή Δυϊκότητα $c^T x^* \le b'^T y^*$. Αν $y_i^* > 0$, προκύπτει ότι $b'^T y^* < b^T y^*$, άρα και $c^T x^* < b^T y^*$, άτοπο λόγω Ισχυρής Δυϊκότητας. Άρα η «σκιώδης τιμή» y_i^* του iστού περιορισμού πρέπει να είναι μηδέν.

Η συμπληρωματική χαλαρότητα για το γενικό μοντέλο (GP) διατυπώνεται με ανάλογο τρόπο. Σε κάθε ζεύγος μη-ελεύθερης μεταβλητής και αντίστοιχου δυϊκού περιορισμού, πρέπει να ισχύει η λογική διάζευξη: η μεταβλητή θα είναι μηδέν ή ο περιορισμός θα ικανοποιείται με ισότητα. Για τα (P) και (D) του Θεωρήματος 9.1 η διάζευξη ισχύει όταν το εσωτερικό γινόμενο $(y^*)^T(b - Ax^*)$ μηδενίζεται. Ανάλογα διατυπώνουμε τη γενική σχέση. Ορίζουμε τις μεταβλητές χαλαρότητας (slack variables) για τους περιορισμούς ανισότητας των (GP) και (GD):

$$\begin{aligned} x_{s1} &= b_1 - A_1 x_1 - A_2 x_2 - A_3 x_3 \\ x_{s2} &= A_4 x_1 + A_5 x_2 + A_6 x_3 - b_2 \\ y_{s1} &= A_1^T y_1 + A_4^T y_2 + A_7^T y_3 - c_1 \\ y_{s2} &= c_2 - A_2^T y_1 - A_5^T y_2 - A_8^T y_3 \end{aligned}$$

Θεώρημα 9.2 *Έστω $m, n \ge 1$. Αν τα διανύσματα*

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad y := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

είναι εφικτά για τα (GP) και (GD) αντίστοιχα, οι παρακάτω δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες.

(i) Τα x και y είναι βέλτιστες λύσεις για τα (GP) και (GD) αντίστοιχα.

(ii) $x_1^T y_{s1} = 0$, $x_2^T y_{s2} = 0$, $x_{s1}^T y_1 = 0$, *και* $x_{s2}^T y_2 = 0$.

Παρατηρούμε ότι το Θεώρημα 9.2 ισχύει για οποιοδήποτε ζεύγος (x, y) βέλτιστων λύσεων, όχι μόνο για βασικές εφικτές λύσεις.

9.3 Μια Γεωμετρική Ερμηνεία της Δυϊκότητας

Έστω πρωτεύον γραμμικό πρόγραμμα

$$\begin{aligned} &\min\ c^T x \\ &a_i^T x \geq b_i, \qquad i = i, \ldots, m,\ x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

και δυϊκό

$$\begin{aligned} &\max\ b^T y \\ &y^T A = c^T \qquad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} y_i a_i = c \\ &y \geq 0. \end{aligned}$$

Έστω $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$, $|I| = n$, τέτοιο ώστε τα $a_i,\ i \in I$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Το σύστημα $a_i^T x = b_i,\ i \in I$ έχει μοναδική λύση, τη x^I, η οποία είναι βασική λύση του πρωτεύοντος γραμμικού προγράμματος. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $a_i^T x^I \neq b_i$, για κάθε $i \notin I$, δηλαδή η x^I είναι μη εκφυλισμένη. Για να είναι τα $x^I,\ y$ βέλτιστες λύσεις για το πρωτεύον και το δυϊκό αντίστοιχα θα πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

(i) $a_i^T x^I \geq b_i$, για κάθε i (εφικτότητα πρωτεύοντος)

(ii) $y_i = 0$, για κάθε $i \notin I$ (συμπληρωματική χαλαρότητα)

(iii) $\sum_{i=1}^{m} y_i a_i = c$ (εφικτότητα δυϊκού)

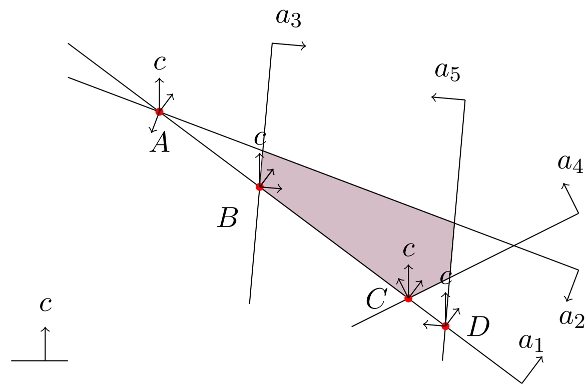
(iv) $y \geq 0$ (εφικτότητα δυϊκού)

Από τις συνθήκες (ii) και (iii) προκύπτει η

$$\sum_{i \in I} y_i a_i = c. \tag{1}$$

Εφόσον τα διανύσματα $a_i,\ i \in I$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, η (1) έχει μοναδική λύση, την y^I. Έτσι, τα $a_i,\ i \in I$ αποτελούν μια βάση για το δυϊκό πρόβλημα και η y^I είναι η αντίστοιχη βασική λύση. Γεωμετρικά, οι συνθήκες (i)-(iv) σημαίνουν ότι μια κορυφή x^* του πρωτεύοντος πολυτόπου είναι βέλτιστη λύση αν και μόνο αν το διάνυσμα c μπορεί να γραφεί ως κωνικός συνδυασμός των περιορισμών που ορίζουν τη (είναι ενεργοί στη) x^*.

Τα παραπάνω απεικονίζονται στο Σχήμα 9.1. Στο παράδειγμα, που προέρχεται από το [1], κάθε υποσύνολο του I, το οποίο περιέχει ακριβώς δύο στοιχεία του, μας δίνει βασικές λύσεις x^I και y^I για το



Σχήμα 9.1: Παράδειγμα γραμμικού προγράμματος με δύο μεταβλητές και πέντε περιορισμούς ανισότητας [1].

πρωτεύον και το δυϊκό αντίστοιχα. Αν $I = \{1, 2\}$, (σημείο A) τότε το διάνυσμα x^I είναι μη εφικτή λύση για το πρωτεύον και το y^I είναι μη εφικτή λύση για το δυϊκό διότι το c δεν μπορεί να εκφραστεί ως κωνικός συνδυασμός των a_1 και a_2. Αν $I = \{1, 3\}$ (σημείο B) τότε το διάνυσμα x^I είναι εφικτή λύση για το πρωτεύον και το y^I είναι μη εφικτή λύση για το δυϊκό. Αν $I = \{1, 4\}$ (σημείο C) τότε το x^I είναι εφικτή λύση για το πρωτεύον και το y^I είναι εφικτή λύση για το δυϊκό. Συγκεκριμένα, τα x^I και y^I είναι βέλτιστες λύσεις. Τέλος, Αν $I = \{1, 5\}$ (σημείο D) τότε το x^I είναι μη εφικτή λύση για το πρωτεύον και το y^I είναι εφικτή λύση για το δυϊκό.

9.4 Θεώρημα Minkowski-Weyl για Κώνους

Στη συνέχεια, υπενθυμίζουμε τους ορισμούς του πολυεδρικού κώνου και του πεπερασμένα παραγόμενου κώνου ενώ δίνουμε και έναν νέο ορισμό· αυτόν του ζεύγους διπλής περιγραφής. Οι ορισμοί αυτοί είναι χρήσιμοι για τη διατύπωση και απόδειξη του Θεωρήματος Minkowski-Weyl για κώνους.

Ορισμός 9.2 *Ένα σύνολο $P \subseteq \mathbb{R}^d$ καλείται* πολυεδρικός κώνος *αν υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$, για κάποιο m, τέτοιος ώστε $P = \{x \mid Ax \leq 0\}$.*

Ορισμός 9.3 *Ένα σύνολο $P \subseteq \mathbb{R}^d$ καλείται* πεπερασμένα παραγόμενος κώνος *αν υπάρχει πίνακας $R \in \mathbb{R}^{d \times t}$, για κάποιο t, τέτοιος ώστε $P = \{x \mid x = R\lambda,\ \lambda \geq 0\}$.*

Ορισμός 9.4 *Ένα ζεύγος πινάκων (A, R) καλείται* ζεύγος διπλής περιγραφής (double description pair) [DD-pair ή ΔΠ-ζεύγος] *αν οι πίνακες αναπαριστούν τον ίδιο κώνο, δηλαδή*

$$Ax \leq 0 \Leftrightarrow x = R\lambda,\ \lambda \geq 0$$

Λήμμα 9.1 *Έστω δύο πίνακες $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ και $R \in \mathbb{R}^{d \times t}$. Το ζεύγος (A, R) είναι ΔΠ-ζεύγος αν και μόνο αν το (R^T, A^T) είναι ΔΠ-ζεύγος.*

Απόδειξη. Λόγω συμμετρίας, αρκεί να δείξουμε τη μία κατεύθυνση. Έστω ότι το (A, R) είναι ΔΠ-ζεύγος, δηλαδή

$$Ax \leq 0 \Leftrightarrow x = R\lambda, \lambda \geq 0 \tag{1}$$

Θα δείξουμε ότι (R^T, A^T) είναι επίσης ΔΠ-ζεύγος.

$$\begin{aligned}
R^T y \le 0 &\Leftrightarrow \lambda^T R^T y \le 0,\ \forall \lambda \ge 0 \\
&\Leftrightarrow (R\lambda)^T y \le 0,\ \forall \lambda \ge 0 \\
&\overset{(1)}{\Leftrightarrow} (Ax \le 0 \Rightarrow x^T y \le 0) \\
&\Leftrightarrow \mu^T A = y^T,\ \text{για κάποιο } \mu \ge 0 \qquad\qquad (\text{Πόρισμα } 8.1)
\end{aligned}$$

∎

Θεώρημα 9.3 (Minkowski-Weyl για κώνους) *Έστω $P \subseteq \mathbb{R}^d$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. *Το P είναι πολυεδρικός κώνος.*
2. *Το P είναι πεπερασμένα παραγόμενος κώνος.*

Απόδειξη. (2) $\Rightarrow$ (1) Έστω πολύεδρο $P = \{x \mid x = R\lambda,\ \lambda \ge 0\}$ όπου $R \in \mathbb{R}^{d\times t}$. Το σύστημα $x = R\lambda,\ \lambda \ge 0$ έχει μεταβλητές x και λ. Με απαλοιφή Fourier-Motzkin διώχνουμε τις μεταβλητές $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ και παίρνουμε ένα ισοδύναμο σύστημα μόνο με μεταβλητές x. Το σύστημα αυτό θα είναι της μορφής $Ax \le 0$ για κάποιο πίνακα A.

Για τη συνεπαγωγή (1) $\Rightarrow$ (2) αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε πίνακα A, υπάρχει ένας πίνακας R τέτοιος ώστε το (A, R) είναι ΔΠ-ζεύγος. Έτσι, δοθέντος κάποιου πίνακα A ψάχνουμε έναν πίνακα ? για τον οποίο να ισχύει το παραπάνω. Από το Λήμμα 9.1, το $(A, ?)$ είναι ΔΠ-ζεύγος αν το $(?^T, A^T)$ είναι ΔΠ-ζεύγος. Από την απόδειξη της αντίστροφης κατεύθυνσης, δοθέντος ενός A^T φτιάχνουμε έναν R^T τέτοιο ώστε (R^T, A^T) είναι ΔΠ-ζεύγος. Από το Λήμμα 9.1, αν το (R^T, A^T) είναι ΔΠ-ζεύγος, τότε και το (A, R) είναι ΔΠ-ζεύγος. ∎

Τη συνεπαγωγή (1) $\Rightarrow$ (2) του Θεωρήματος 9.3 απέδειξε ο Minkowski [2] ενώ τη συνεπαγωγή (2) $\Rightarrow$ (1) απέδειξε ο Weyl [3].

*9.5 Αυστηρή Συμπληρωματική Χαλαρότητα

Θεωρούμε ένα ζεύγος πρωτεύοντος-δυϊκού με το πρωτεύον σε πρότυπη μορφή.

$$\begin{aligned}
\min\ & c^T x & \qquad (P_S) \qquad\qquad & \max\ b^T y & \qquad (D_S) \\
& Ax = b & & A^T y \le c & \\
& x \ge 0 & & &
\end{aligned}$$

Για να κωδικοποιήσουμε την έννοια του ενεργού περιορισμού εισάγουμε τις λεγόμενες μεταβλητές χαλαρότητας (slack variables). Το (D_S) γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{aligned}
\max\ & b^T y \qquad\qquad (D'_S) \\
A^T y + s &= c \\
s &\ge 0
\end{aligned}$$

όπου $s \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Ορίζουμε ως Ω_P, Ω_D τα σύνολα των βέλτιστων λύσεων των (P_S) και (D'_S) αντίστοιχα. Υποθέτουμε στο εξής ότι τα δύο σύνολα είναι μη κενά και η βέλτιστη τιμή των δύο γραμμικών προγραμμάτων είναι ίση με γ. Δηλαδή

$$c^T x = b^T y = \gamma, \;\; \forall x \in \Omega_P, \forall y \in \Omega_D.$$

Ορίζουμε δύο σύνολα δεικτών $\mathcal{B}$ και $\mathcal{N}$ ως εξής:

$$\mathcal{B} := \{i \in [n] \mid \exists x^* \in \Omega_P \text{ τ.ώ. } x_i^* > 0\}$$
$$\mathcal{N} := \{i \in [n] \mid \exists (y^*, s^*) \in \Omega_P \text{ τ.ώ. } s_i^* > 0\},$$

Με τον παραπάνω συμβολισμό το ευθύ του Θεωρήματος 9.1 διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \varnothing. \tag{9.1}$$

Για δύο διανύσματα $p, q \in \mathbb{R}^n$, συμβολίζουμε με pq το διάνυσμα $(p_i q_i)_{i \in [n]}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 9.1 ένα ζεύγος εφικτών λύσεων x^* και (y^*, s^*) για το (P_S) και το (D'_S) αντίστοιχα είναι βέλτιστες αν και μόνο αν $xs = 0$. Δηλ., για κάθε $i \in [n]$, $x_i^* = 0$ ή $s_i^* = 0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει πάντα ένα ζευγάρι βέλτιστων λύσεων που ικανοποιεί την αποκλειστική διάζευξη, δηλ. για κάθε i ακριβώς ένα από τα x_i, s_i είναι μηδέν. Ως συνέπεια θα προκύψει ότι $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} = [n]$.

Λήμμα 9.2 *Αν το (P_S) και το (D_S) είναι εφικτά, για οποιοδήποτε $j \in [n]$, υπάρχει βέλτιστη λύση $x^{(j)}$ του (P_S) και βέλτιστη λύση $(y^{(j)}, s^{(j)})$ του (D'_S) έτσι ώστε $x_j^{(j)} + s_j^{(j)} > 0$.*

Απόδειξη. Αν υπάρχει βέλτιστη λύση $x^{(j)}$ του (P_S) έτσι ώστε $x_j^{(j)} > 0$ η πρόταση ισχύει. Ειδάλλως σε κάθε βέλτιστη λύση $x_j^{(j)} = 0$. Θεωρούμε το ακόλουθο ζεύγος πρωτεύοντος-δυϊκού όπου το διάνυσμα e_j είναι το jστό μοναδιαίο διάνυσμα. Η μεταβλητή π είναι βαθμωτό μέγεθος.

$$\begin{aligned} \min \; -e_j^T x & \qquad (P^{(j)}) \\ Ax = b & \\ -c^T x \geq -\gamma & \\ x \geq 0 & \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \max \; b^T y - \gamma\pi & \qquad (D^{(j)}) \\ A^T y - \pi c \leq -e_j & \\ \pi \geq 0 & \end{aligned}$$

Με βάση τις υποθέσεις μας, η βέλτιστη τιμή του $(P^{(j)})$ είναι ίση με μηδέν. Από ισχυρή δυϊκότητα υπάρχει λύση $(\hat{y}, \hat{\pi})$ του $(D^{(j)})$ έτσι ώστε $b^T \hat{y} - \gamma\hat{\pi} = 0$.

Αν $\hat{\pi} > 0$, $b^T \frac{\hat{y}}{\hat{\pi}} = \gamma$. Επειδή $(\hat{y}, \hat{\pi})$ εφικτή λύση του $(D^{(j)})$ έχουμε ότι

$$A^T \frac{\hat{y}}{\hat{\pi}} + \frac{e_j}{\hat{\pi}} \leq c.$$

Επομένως το διάνυσμα $\hat{y}/\hat{\pi}$ είναι βέλτιστη λύση του (D_S) με την ιδιότητα $(A^T)_j \frac{\hat{y}}{\hat{\pi}} < c_j$ όπου $(A^T)_j$ είναι η jστή γραμμή του πίνακα A^T. Άρα υπάρχει βέλτιστη λύση $(y^{(j)}, s^{(j)})$ του (D'_S) έτσι ώστε $x_j^{(j)} + s_j^{(j)} > 0$.

Αν $\hat{\pi} = 0$, $b^T \hat{y} - \gamma\hat{\pi} = b^T \hat{y} = 0$. Θεωρούμε $\tilde{y}$ μια βέλτιστη λύση του (D_S) και ορίζουμε $\bar{y} = \hat{y} + \tilde{y}$. Ορίζουμε $\tilde{s} = c - A^T \tilde{y}$ και παίρνουμε ότι

$$c - A^T\bar{y} = c - A^T\hat{y} - A^T\tilde{y} = \tilde{s} - A^T\hat{y} \geq \tilde{s} + e_j. \tag{9.2}$$

Το διάνυσμα $\bar{y}$ είναι εφικτή λύση του (D_S) και δίνει τιμή $b^T\bar{y} = b^T\tilde{y} = \gamma$. Άρα το $\bar{y}$ είναι βέλτιστη λύση του (D_S). Επίσης από την (9.2) $c_j - (A^T)_j\bar{y} > 0$. Θέτοντας $y^{(j)} = \bar{y}$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει βέλτιστη λύση $(y^{(j)}, s^{(j)})$ του (D'_S) έτσι ώστε $x_j^{(j)} + s_j^{(j)} > 0$. ∎

Δοθέντων n διανυσμάτων $x^1, \ldots, x^n$, ένας κυρτός συνδυασμός $\sum_{i=1}^n \lambda_i x^i$ όπου $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ και $\lambda_i > 0$ για κάθε $i \in [n]$ καλείται *γνήσιος* κυρτός συνδυασμός.

Θεώρημα 9.4 *Αν το (P_S) και το (D_S) είναι εφικτά, υπάρχει βέλτιστη λύση x^* του (P_S) και βέλτιστη λύση (y^*, s^*) του (D'_S) έτσι ώστε $x^* + s^* > 0$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 9.2 παίρνουμε n ζευγάρια λύσεων για τα (P_S) και (D'_S), x^j και $(y^{(j)}, s^{(j)})$, $j \in [n]$, με την ιδιότητα ότι $x_j^{(j)} + s_j^{(j)} > 0$, για κάθε $j \in [n]$. Ένας γνήσιος κυρτός συνδυασμός των n αυτών λύσεων δίνει βέλτιστες λύσεις x^* του (P_S) και (y^*, s^*) του (D'_S) έτσι ώστε $x^* + s^* > 0$. ∎

Αναφορές

[1] D. P. Bertsimas and J. N. Tsitsiklis. *Introduction to Linear Optimization.* Athena Scientific, 1997.

[2] H. Minkowski. *Geometrie der Zahlen (Erste Lieferung).* Teubner, Leipzig, 1896.

[3] H. Weyl. Elementare Theorie der konvexen Polyeder. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 7:290–306, 1935.