Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 11: 18.11.2014 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Μανιάτης Σπυρίδων & Μυρισιώτης Δημήτριος & Σ. Κ.

11.1 Ξανά περί lineality space

Υπενθυμίζεται η έννοια του lineality space και παρατίθεται ένα παράδειγμα σχετικό με αυτόν τον χώρο.

Ορισμός 11.1 *Έστω πολύεδρο $P = \{x \mid Ax \leq b\}$. Ως* lineality space *του πολυέδρου P, ή* $\text{lin}(P)$, *ορίζεται η ποσότητα:*

$$\text{rec}(P) \cap -\text{rec}(P) = \{y \mid Ay = 0\}.$$

Εναλλακτικά, κάποιος δύναται να γράψει

$$\text{lin}(P) := \text{rec}(P) \cap -\text{rec}(P) = \{y \mid Ay = 0\}.$$

Ο συγκεκριμένος όρος, μέχρι στιγμής, δεν έχει αποδοθεί ικανοποιητικά στα ελληνικά.

Παράδειγμα 11.1 *Έστω ημίχωρος P, με*

$$P = \left\{x \mid \alpha^T x \leq \beta\right\}.$$

Στο Σχήμα 11.1, παρουσιάζεται η μορφή του P με τρόπο τέτοιο ώστε εξηγείται η φύση του χώρου $\text{lin}(P)$, *ως χώρου που περιέχει τις κατευθύνσεις που* δεν *οδηγούν εκτός του πολυέδρου.*

11.2 Υποδηλούμενες Ισότητες

Ακολουθεί ο ορισμός των υποδηλούμενων ισοτήτων, που ανακύπτουν σε ένα σύστημα της μορφής $Ax \leq b$. Επίσης, παρουσιάζονται κάποια βασικά αποτελέσματα σχετικά με τις ισότητες αυτές.

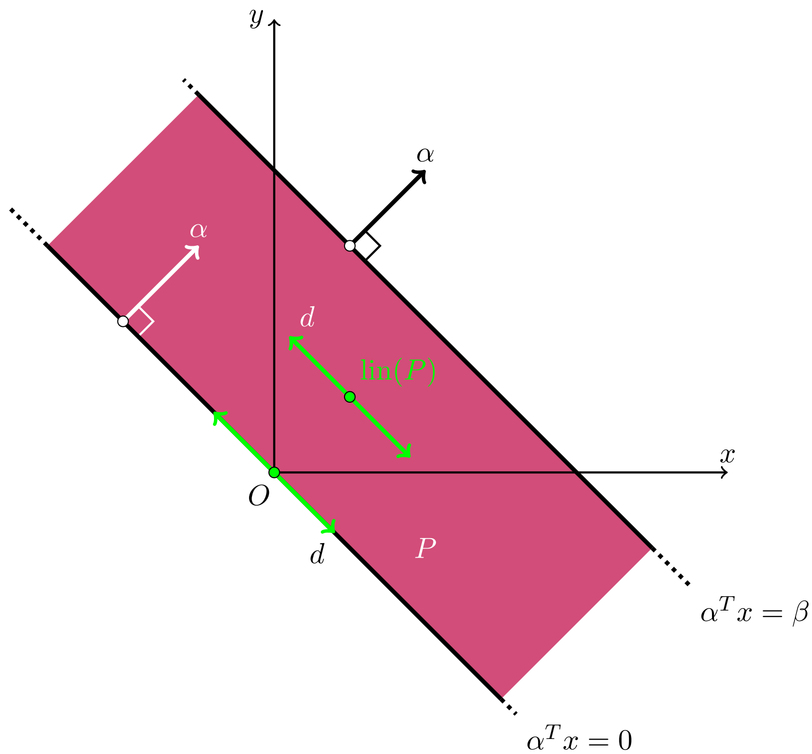
Ορισμός 11.2 *Έστω σύστημα ανισώσεων $Ax \leq b$. Μία ανισότητα $\alpha_i^T x \leq b_i$ του συστήματος καλείται* υποδηλούμενη ισότητα (implicit equality) *αν*

$$Ax \leq b \Longrightarrow \alpha_i^T x = b_i.$$

Θεωρούμε ένα $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Αν η $\alpha_i^T x \leq b_i$ είναι υποδηλούμενη ισότητα του συστήματος

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i^T x = b_i\right\}.$$

Με βάση τον Ορισμό 11.2, το σύστημα $Ax \leq b$ διαμερίζεται σε δύο υποσυστήματα:



Σχήμα 11.1: Οι χώροι P και $\mathrm{lin}(P)$.

1. Στο υποσύστημα $A^{=}x \le b^{=}$, που περιέχει όλες τις υποδηλούμενες ισότητες του $Ax \le b$, και
2. Στο υποσύστημα $A^{+}x \le b^{+}$, που περιέχει τις υπόλοιπες ανισότητες του $Ax \le b$.

Τα αντίστοιχα σύνολα δεικτών είναι τα $I^{=}$ και I^{+} και, αν $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, τότε

$$I^{=} \cup I^{+} = I^{=} \uplus I^{+} = \{1, \ldots, m\}.$$

Οπότε, σχετικά με το πολύεδρο P, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P &= \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid A^{=}x \le b^{=},\, A^{+}x \le b^{+}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid A^{=}x = b^{=},\, A^{+}x \le b^{+}\right\}. \end{aligned}$$

Η Πρόταση 11.1, που ακολουθεί, αιτιολογεί την ύπαρξη κάποιου $\bar{x}$ στο σχετικό εσωτερικό (relative interior) του πολυέδρου.

Πρόταση 11.1 *Έστω μη κενό πολύεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$. Τότε*

$$(\exists \bar{x})\left[A^{=}\bar{x} = b^{=} \ \&\ A^{+}\bar{x} < b^{+}\right].$$

Απόδειξη. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, ανάλογα αν $I^{+} = \emptyset$ ή $I^{+} \neq \emptyset$.

$[I^{+} = \emptyset]$ Στην περίπτωση αυτή το συμπέρασμα συνάγεται τετριμμένα, καθώς αν $I^{+} = \emptyset$ κάθε ανισότητα είναι υποδηλούμενη ισότητα.

$[I^+ \neq \emptyset]$ Στην περίπτωση αυτή, έχουμε ότι

$$\left(\forall i \in I^+\right) \left(\exists x^i \in P\right) \left[\alpha_i^T x^i < b_i\right].$$

Οπότε, θέτουμε

$$\bar{x} = \frac{1}{|I^+|} \sum_{i \in I^+} x^i,$$

και παρατηρούμε ότι το συγκεκριμένο $\bar{x}$ ικανοποιεί τις

$$A^= \bar{x} = b^= \ \& \ A^+ \bar{x} < b^+.$$

∎

Ακολουθεί το Θεώρημα 11.1 που αποδεικνύει μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες, για μη κενά πολύεδρα, βασιζόμενο στην έννοια των υποδηλούμενων ισοτήτων.

Θεώρημα 11.1 *Έστω μη κενό πολύεδρο* $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. *Τότε*

(i) $\mathrm{aff}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x = b^=\}$, *και*

(ii) $\dim(P) = n - \mathrm{rank}(A^=)$.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε χωριστά τις δύο ιδιότητες.

(i). Ισχύει ότι

$$P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x = b^=\}$$

οπότε,

$$\mathrm{aff}(P) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x = b^=\}.$$

Άρα απομένει να αποδειχθεί ότι

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x = b^=\} \subseteq \mathrm{aff}(P).$$

Προς αυτήν την κατεύθυνση, θεωρούμε ένα αυθαίρετο σημείο $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, με

$$A^= \hat{x} = b^=$$

και θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι $\hat{x} \in \mathrm{aff}(P)$.

Από την Πρόταση 11.1,υπάρχει κάποιο $\bar{x}$ τέτοιο ώστε

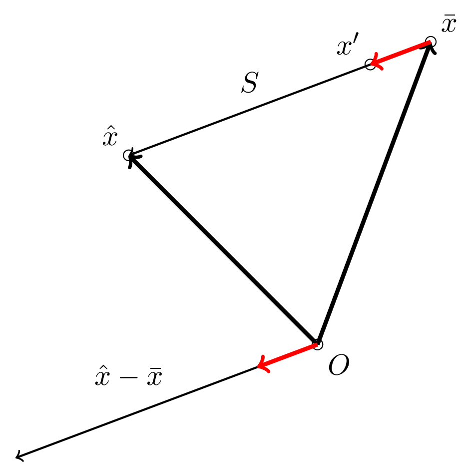
$$A^= \bar{x} = b^= \ \& \ A^+ \bar{x} < b^+. \tag{11.1}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε ως S το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $\hat{x}$ και $\bar{x}$. Παρατηρούμε ότι

$$S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x = b^=\}.$$

Θεωρούμε επίσης ένα σημείο $x' \in S$ που να βρίσκεται «αρκούντως κοντά» στο $\bar{x}$ (βλ. Σχήμα 11.2) δηλ. για κατάλληλα μικρό $\varepsilon > 0$,

$$x' := \bar{x} + \varepsilon(\hat{x} - \bar{x}) = (1 - \varepsilon)\bar{x} + \varepsilon\hat{x}.$$



Σχήμα 11.2: Τα διανύσματα $\bar{x}$, $\hat{x}$ και x', και το ευθύγραμμο τμήμα S.

Έχουμε ότι $x', \bar{x} \in S$. Αν, επιπλέον, αποδείξουμε ότι $x' \in P$ μπορούμε να συνάγουμε ότι

$$\bar{x}, x' \in \text{aff}(P) \tag{11.2}$$

και, από την (11.2), ότι η ευθεία που φέρει το τμήμα S ανήκει στο aff(P). Τελικά, επειδή $\hat{x} \in S$, λαμβάνουμε επίσης ότι

$$\hat{x} \in \text{aff}(P)$$

και η απόδειξη του (i) θα έχει ολοκληρωθεί. (Πιο άμεσα, επειδή $\hat{x} = (1/\varepsilon)x' - ((1-\varepsilon)/\varepsilon)\bar{x}$ το $\hat{x}$ είναι αφινικός συνδυασμός των x', $\bar{x}$. Άρα από την (11.2) παίρνουμε ότι $\hat{x} \in \text{aff}(P)$.)

Απομένει να δείξουμε ότι όντως $x' \in P$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι

(*a*) $A^{=}x' \leq b^{=}$, και,

(*b*) $A^{+}x' \leq b^{+}$.

Εδώ υπάρχει ένα λεπτό σημείο. Αν δείξουμε ότι $A^{=}x' < b^{=}$ και $A^{+}x' \leq b^{+}$ έπεται ότι $x' \notin P$. Η συνύπαρξη των (α) και (β) στο ίδιο σύστημα *απαγορεύει* την αυστηρή ανισότητα στο υποσύστημα (α).

Αν θέσουμε $\theta_i = \varepsilon(\hat{x}_i - \bar{x}_i)$ από τον ορισμό του x' παίρνουμε ότι

$$x' = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 + \theta_1 \\ \bar{x}_2 + \theta_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n + \theta_n \end{bmatrix}.$$

Από την (11.1), παρατηρούμε ότι− για κατάλληλο ε− η απόλυτη τιμή κάθε θ_i είναι «αρκούντως μικρή». Συνεπώς $A^{+}x' \leq b^{+}$. Επιπλέον

$$A^{=}x' = A^{=}(\bar{x} + \varepsilon(\hat{x} - \bar{x})) = b^{=} + \varepsilon(b^{=} - b^{=}) = b^{=}.$$

Άρα λαμβάνουμε ότι $x' \in P$.

(ii). Ισχύει ότι
$$\mathrm{aff}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x = b^=\}.$$

Εύκολα αποδεικνύεται η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 11.2 *(i) Τα σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ είναι αφινικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν $\dim(\mathrm{aff}(\{x_0, x_1, \ldots, x_m\})) = m$. (ii) Αν $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\} \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^n$, είναι ένα μέγιστο σύνολο αφινικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του X, τότε $\mathrm{aff}(X) = \mathrm{aff}(\{x_0, x_1, \ldots, x_m\})$.*

Από την Πρόταση 11.2 προκύπτει ότι
$$\dim(P) = \dim(\mathrm{aff}(P)).$$

Επίσης
$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{aff}(P)) &= \dim(\{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x = b^=\}) \\ &\overset{\text{Γρ. Άλγ.}}{=} n - \mathrm{rank}(A^=).\end{aligned}$$

Η απόδειξη είναι πλέον πλήρης. ∎

*11.3 Εναλλακτική απόδειξη του Θεωρήματος 11.1

Εδώ δίνουμε μια λίγο διαφορετική, αλγεβρική, απόδειξη των προτάσεων
(i) $\mathrm{aff}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x = b^=\}$, και
(ii) $\dim(P) = n - \mathrm{rank}(A^=)$.

Θεωρήστε τον γραμμικό υπόχωρο $L_P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x = 0\}$. Ισχύει ότι $L_P \supseteq \mathrm{lin}(P)$. Θέτουμε $m^= = \mathrm{rank}(A^=)$. Η διάσταση του L_P είναι $n - m^=$ και έστω $y^1, \ldots, y^{n-m^=}$ μια βάση του L_P. Για κατάλληλο $\varepsilon > 0$ έχουμε ότι $\bar{x} + \varepsilon y^i \in P$ για $i = 1, \ldots, n - m^=$. Αφού τα διανύσματα $\varepsilon y^1, \ldots, \varepsilon y^{n-m^=}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα τα διανύσματα $\bar{x}, \bar{x} + \varepsilon y^1, \ldots, \bar{x} + \varepsilon y^{n-m^=}$ είναι αφινικά ανεξάρτητα. Επομένως
$$\dim(P) \geq n - m^=. \tag{11.3}$$

Όμως $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x = b^=\}$ και άρα η (11.3) ισχύει με ισότητα αφού $P \neq \varnothing$ και $\dim\{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x = b^=\} = \dim(L_P) = n - m^=$.

Κατά συνέπεια, το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x = b^=\}$ είναι αφινικός υπόχωρος με τη μικρότερη δυνατή διάσταση ο οποίος περιέχει το P.

Ισχυρισμός 11.1 *Έστω $X \subseteq Y$ δύο αφινικοί υπόχωροι στο $\mathbb{R}^n$. Αν $\dim(X) = \dim(Y)$, τότε $X = Y$.*

Απόδειξη ισχυρισμού. Θέτουμε $m = \dim(X)$. Έστω $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\} \subseteq X$ ένα σύνολο $m+1$ αφινικά ανεξάρτητων διανυσμάτων. Από την Πρόταση 11.2(ii) $\mathrm{aff}(Y) = \mathrm{aff}(\{x_0, x_1, \ldots, x_m\})$. ∎

Από τον Ισχυρισμό 11.1 παίρνουμε ότι $\mathrm{aff}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x = b^=\}$ και η απόδειξη είναι πλήρης.