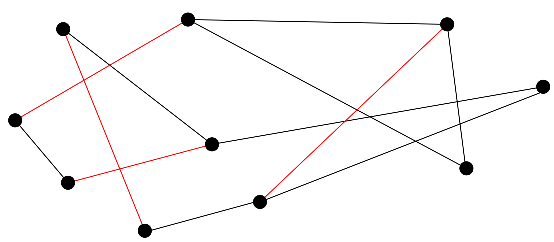
Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού
Διάλεξη 17: 16.12.2014 — Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος
Γραφείς: Λιβιεράτος Ιωάννης, Πετροπαναγιωτάκη Μαρία, Σ. Κ.

17.1 Το πολύτοπο των ταιριασμάτων

Έστω $G = (V, E)$ μη κατευθυνόμενο γράφημα. *Ταίριασμα (matching)* στο G καλείται ένα σύνολο $M \subseteq E$ τέτοιο ώστε για κάθε $e_1 = \{u_1, v_1\}, e_2 = \{u_2, v_2\} \in M$ να ισχύει ότι $e_1 \cap e_2 = \varnothing$. Ένα ταίριασμα M καλείται *τέλειο (perfect)* αν επιπλέον ισχύει ότι $|M| = \frac{|V|}{2}$. Λέμε ότι ένα ταίριασμα M *καλύπτει μία κορυφή* v αν υπάρχει $e \in M$, τ. ώ. $v \in e$. Αν το M δεν καλύπτει την v λέμε επίσης ότι το M *παραλείπει* την v.



Σχήμα 17.1: Οι κόκκινες ακμές αποτελούν ένα (μεγιστικό) ταίριασμα του γραφήματος.

Ορίζουμε ως *πολύτοπο των ταιριασμάτων* το

$$M(G) = \mathrm{conv}\{\chi^M \in \{0,1\}^{|E|} \mid \chi^M \text{ χαρακτηριστικό διάνυσμα ταιριάσματος } M \text{ του } G\}$$

.

Θα μας χρησιμεύσουν οι παρακάτω συμβολισμοί. Για $E' \subseteq E$, $x(E') = \sum_{e \in E'} x_e$. Για $S \subseteq V$, $\delta(S) = \{\{u, v\} \in E : u \in S, v \notin S\}$ και $\gamma(S) = \{\{u, v\} \in E : u \in S \wedge v \in S\}$.

Οι παρακάτω ανισότητες είναι έγκυρες για το $M(G)$:

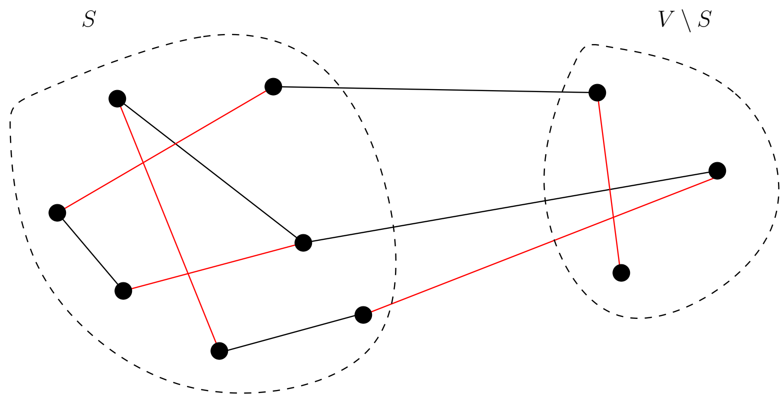
$$x(\delta(v)) \leq 1 \qquad \forall v \in V \tag{17.1}$$

$$x(\gamma(S)) \leq \frac{|S| - 1}{2} \qquad \forall S \subseteq V, \text{με } |S| \text{ περιττό} \tag{17.2}$$

$$x_e \geq 0 \qquad \forall e \in E \tag{17.3}$$

Προσέξτε ότι η ανισότητα $x(\delta(S)) \geq 1\,, S \subseteq V$ τέτοιο ώστε $|S|$ περιττός δεν είναι έγκυρη. Ονομάζουμε $P(G)$ το πολύτοπο που ορίζουν οι (17.1), (17.2),(17.3).

Πρόταση 17.1 $M(G) \subseteq P(G)$.



Σχήμα 17.2: Για $|S| = 7$, σε μια ακέραια λύση x ισχύει ότι $x(\gamma(S)) \leq \frac{7-1}{2} = 3$.

Ο Edmonds απέδειξε ότι τα δύο πολύτοπα ταυτίζονται.

Θεώρημα 17.1 (The Matching Polytope Theorem [1]) *Για ένα μη κενό γράφημα G ισχύει ότι $M(G) = P(G)$.*

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 17.1 θα χρησιμεύσουν οι ακόλουθες παρατηρήσεις.

Πρόταση 17.2 *Το πολύτοπο $M(G)$ είναι πλήρους διάστασης, δηλαδή $\dim(M(G)) = |E(G)|$.*

Απόδειξη. Έστω $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Για κάθε $i \in [m]$, το χαρακτηριστικό διάνυσμα χ_{e_i} της αντίστοιχης ακμής ανήκει στο $M(G)$. Επίσης τετριμμένα $\vec{0} \in M(G)$. Βρήκαμε $m+1$ το πλήθος αφινικά ανεξάρτητα διανύσματα που ανήκουν στο πολύτοπο. Επομένως $\dim(M(G)) = |E(G)|$. ∎

(i) Από το Πόρισμα 15.2 γνωρίζουμε ότι για αν το P είναι πολύεδρο πλήρους διάστασης η αναπαράσταση $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ είναι ελαχιστική αν και μόνο αν κάθε ανισότητα $a_i^{\mathrm{T}} x \leq b_i$ ορίζει μια διακεκριμένη έδρα του P.

(ii) Δεδομένου ότι $M(G) \subseteq P(G)$, θα ισχύει ότι $M(G) = P(G)$ αν και μόνο αν σε κάθε έδρα του $M(G)$ αντιστοιχεί μια ανισότητα από τις (17.1), (17.2),(17.3). Τότε αφού κάθε έδρα του $M(G)$ αναπαρίσταται, έπεται ότι το σύστημα που ορίζει το $P(G)$ περιέχει μια ελαχιστική αναπαράσταση του $M(G)$. Μαζί πιθανώς και με άλλες έγκυρες ανισότητες.

17.2 Απόδειξη του Θεωρήματος του Edmonds

Η παρακάτω απόδειξη δόθηκε από τον Lovász [2].

Απόδειξη. Έστω

$$w^{\mathrm{T}} x \leq t \tag{17.4}$$

εδραία ανισότητα του $M(G)$ που ορίζει μια έδρα F και έστω M^* το σύνολο των ταιριασμάτων που ικανοποιούν την (17.4) με ισότητα. Θα δείξουμε ότι κάποια ανισότητα

$$\alpha^{\mathrm{T}} x \leq b \tag{*}$$

από τις (17.1), (17.2),(17.3) επίσης ικανοποιείται με ισότητα από τα στοιχεία του M^*. Επειδή οποιοδήποτε σημείο στην F είναι κυρτός συνδυασμός των στοιχείων του M^*, έπεται ότι $F \subseteq F_*$ όπου F_* η όψη που ορίζει η (*). Επειδή F έδρα, άρα μεγιστική γνήσια όψη, προκύπτει ότι $F = F_*$.

Ας δούμε το επιχείρημα από διαφορετική οπτική γωνία. Αφού $\dim(F) = m - 1$, η F περιέχει m αφινικά ανεξάρτητα σημεία του $M(G)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας αυτά τα σημεία είναι κορυφές του $M(G)$ (γιατί;), άρα αντιστοιχούν σε ταιριάσματα, το σύνολο των οποίων είναι το M^*. Αν δείξουμε ότι όλα τα ταιριάσματα του M^* ικανοποιούν με ισότητα την ανισότητα (*) τότε τα υπερεπίπεδα $\{x \mid w^T x = t\}$ και $\{x \mid \alpha^T x = b\}$ του $\mathbb{R}^m$ περιέχουν τα ίδια m αφινικά ανεξάρτητα σημεία. Αφήνεται ως άσκηση να δειχτεί ότι τα δύο υπερεπίπεδα ταυτίζονται. Συμπεραίνουμε ότι είτε υπάρχει $\lambda > 0$, τ. ώ. η (*) να είναι της μορφής $\lambda w^{\mathrm{T}} x \leq \lambda t$ είτε η (*) είναι η $w^{\mathrm{T}} x \geq t$. Επειδή όμως η (*) είναι έγκυρη ανισότητα για το $M(G)$ το δεύτερο ενδεχόμενο μπορεί να συμβαίνει μόνο αν κάθε $x \in M(G)$ ικανοποιεί την (17.4) με ισότητα. Αδύνατο, γιατί το πολύτοπο $M(G)$ είναι πλήρους διάστασης. Άρα τελικά η (*) είναι εδραία ανισότητα του $M(G)$.

Στη συνέχεια της απόδειξης εξετάζουμε τρεις περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. Έστω $w_e < 0$ για κάποιο $e \in E$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ταίριασμα $M \in M^*$ με $\chi_e^M > 0$. Επειδή $w^T \chi^M = t$, αν ορίσουμε το ταίριασμα $M' = M \setminus \{e\}$, τότε $w^{\mathrm{T}} \chi^{M'} > t$, άτοπο. Άρα όλα τα ταιριάσματα του M^* πρέπει να ικανοποιούν με ισότητα την ανισότητα

$$x_e \geq 0$$

η οποία είναι της μορφής (17.3).

Περίπτωση 2. Έστω ότι για κάποιο $v \in V$, κάθε ταίριασμα του M^* καλύπτει την κορυφή v. Δηλ. για κάθε $M \in M^*$, $\chi^M(\delta(v)) = 1$. Άρα όλα τα ταιριάσματα του M^* πρέπει να ικανοποιούν με ισότητα την ανισότητα

$$x(\delta(v)) \leq 1$$

η οποία είναι της μορφής (17.1).

Περίπτωση 3. Έστω $w_e \geq 0$, $\forall e \in E$ και ότι $\forall v \in V$ υπάρχει ταίριασμα στο M^* που δεν καλύπτει την κορυφή v. Η εξέταση της περίπτωσης αυτής, που ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος, θα γίνει στη Διάλεξη 18.

∎

Αναφορές

[1] J. Edmonds. Maximum matching and a polyhedron with 0, 1- vertices. *Journal of Research of the National Bureau of Standards, Series B*, 69:125 – 130, 1965.

[2] L. Lovász. Graph theory and integer programming. In P. L. Hammer, E. L. Johnson, and B. H. Korte, editors, *Discrete Optimization I*, volume 4 of *Annals of Discrete Mathematics*, pages 146–158. 1979.