Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 19: 23.12.2014 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Χαρίλαος Τζόβας & Σ. Κ.

19.1 Στοιχεία Θεωρίας Πολυπλοκότητας

Για να εξετάσουμε την πολυπλοκότητα χρόνου, χρειάζεται να ορίσουμε το μέγεθος της εισόδου ενός προβλήματος. Ο παρακάτω τελεστής θα είναι χρήσιμος.

Ορισμός 19.1 *Ο τελεστής* size(x) *επιστρέφει το πλήθος των bits που χρειάζονται για την αναπαράσταση της μεταβλητής x.*

Αν θέλουμε να αναπαραστήσουμε έναν ρητό αριθμό θα έχουμε:

$$\text{αν } r \in \mathbb{Q},\ r = \frac{p}{q} \text{ με } gcd(p,q) = 1, \text{ τότε } \operatorname{size}(r) = 1 + \lceil \log_2(|p|+1) \rceil + \lceil \log_2(|q|+1) \rceil,$$

όπου η μονάδα είναι το bit που δείχνει ποιός από τους δύο αριθμούς είναι ο αριθμητής και ποιός ο παρονομαστής.

Για διάνυσμα $c \in \mathbb{Q}^n$, ισχύει ότι $\operatorname{size}(c) = n + \sum_{i=1}^{n} \operatorname{size}(c_i)$. Για πίνακα $A \in \mathbb{Q}^{n\times m}$ ισχύει ότι $\operatorname{size}(A) = n \cdot m + \sum_{i,j} \operatorname{size}(A_{ij})$.

Αλφάβητο είναι ένα πεπερασμένο σύνολο Σ. Με Σ^* συμβολίζουμε το σύνολο όλων των συμβολοσειρών που μπορούν να φτιαχτούν από τα στοιχεία του Σ. Χάριν απλότητας θεωρούμε στο εξής ότι $\Sigma = \{0,1\}$. Με αυτό τον τρόπο το μήκος n μιας συμβολοσειράς w που παριστάνει τον αριθμό $w_1 2^{n-1} + \ldots + w_n 2^0$ στο δυαδικό σύστημα ταυτίζεται με το size(w) όπως το ορίσαμε παραπάνω. Οι όροι γλώσσα και πρόβλημα απόφασης ορίζουν την ίδια έννοια: ένα σύνολο συμβολοσειρών.

Ορισμός 19.2 Πρόβλημα απόφασης *ή* γλώσσα *καλείται ένα υποσύνολο* Π *του* Σ^*.

Ένα παράδειγμα προβλήματος απόφασης: $\Pi_0 = \{(A,b) \mid A$ ρητός πίνακας, b ρητό διάνυσμα και $\exists x : Ax \le b\}$. Τις συμβολοσειρές $w \in \Pi$ μπορούμε να τις σκεφτούμε ως τις εισόδους (στιγμιότυπα) για τις οποίες ένας αλγόριθμος που απαντάει στο ερώτημα «η συμβολοσειρά w ανήκει στο Π;» επιστρέφει ΝΑΙ ως απάντηση. (Ένας αλγόριθμος ορίζεται ως Μηχανή Turing, παραλείπουμε τις σχετικές λεπτομέρειες). Λέμε ότι το πρόβλημα απόφασης Π είναι *επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο* αν υπάρχει αλγόριθμος που με είσοδο w αποφασίζει αν $w \in \Pi$ σε χρόνο πολυωνυμικό ως προς το μέγεθος της εισόδου, δηλαδή σε χρόνο poly(size(w)). Είναι αξιοσημείωτο ότι για συστήματα γραμμικών ανισοτήτων, το πρόβλημα απόφασης για το αν το σύστημα είναι εφικτό (δηλ. το πρόβλημα Π_0 που ορίσαμε παραπάνω) και το πρόβλημα *εύρεσης* όπου ζητείται ο υπολογισμός μιας λύσης (εάν υπάρχει) είναι πολυωνυμικά ισοδύναμα. Βλ. Θεώρημα 19.5.

Ορισμός 19.3 *Η κλάση* P *είναι το σύνολο των προβλημάτων απόφασης που είναι επιλύσιμα σε πολυωνυμικό χρόνο, δηλ.*

$$\mathsf{P} = \{\Pi \subseteq \Sigma^* \mid \Pi \text{ επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο}\}$$

Την κλάση NP την ορίζουμε σαν την κλάση προβλημάτων απόφασης Π όπου για κάθε κάθε στιγμιότυπο w που επιδέχεται απάντηση ΝΑΙ υπάρχει απόδειξη ότι $w \in \Pi$ η οποία (i) έχει μέγεθος $\mathrm{poly}(\mathrm{size}(w))$ και (ii) είναι επαληθεύσιμη από αλγόριθμο που τρέχει σε πολυωνυμικό χρόνο. Στο εξής όταν αναφερόμαστε σε αποδείξεις «πολυωνυμικού μεγέθους» θα εννοούμε αποδείξεις που πληρούν τα (i) και (ii).

Ορισμός 19.4 *Η κλάση* NP *είναι το σύνολο των προβλημάτων απόφασης $\Pi \in \Sigma^*$ για τα οποία υπάρχει πρόβλημα απόφασης $\Pi' \in \mathsf{P}$ και πολυώνυμο p τέτοιο ώστε:*

$$\forall w \in \Sigma^*,\ w \in \Pi \Leftrightarrow \exists z : \mathrm{size}(z) \le p(\mathrm{size}(w)) \wedge (w, z) \in \Pi'.$$

Ο πολυωνυμικός αλγόριθμος που επιλύει το πρόβλημα Π' στον Ορισμό 19.4 παίζει το ρόλο του «επαληθευτή» για το πρόβλημα Π. Ορίζουμε τώρα την κλάση coNP. Ένα πρόβλημα Π ανήκει στην κλάση coNP εάν υπάρχει πολυωνυμικά επαληθεύσιμη απόδειξη για τις εισόδους που *δεν* ανήκουν στο Π.

Ορισμός 19.5 *Η κλάση* coNP *είναι το σύνολο των προβλημάτων απόφασης $\Pi \in \Sigma^*$ για τα οποία υπάρχει πρόβλημα απόφασης $\Pi' \in \mathsf{P}$ και πολυώνυμο p τέτοιο ώστε:*

$$\forall w \in \Sigma^*,\ w \notin \Pi \Leftrightarrow \exists z : \mathrm{size}(z) \le p(\mathrm{size}(w)) \wedge (w, z) \in \Pi'.$$

Ή, ισοδύναμα, σαν την κλάση προβλημάτων απόφασης που το συμπληρωματικό τους ανήκει στην NP*:*

$$\mathsf{coNP} = \{\Pi \in \Sigma^* \mid \Sigma^* \setminus \Pi \in \mathsf{NP}\}$$

Το παρακάτω λήμμα δεν θα το αποδείξουμε. Βλ. Θεώρημα 10.1 στο [4].

Λήμμα 19.1 *Αν το σύστημα $Ax \le b$, με $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$ έχει λύση, τότε έχει και λύση x_0 τέτοια ώστε $\mathrm{size}(x_0) = \mathrm{poly}(\mathrm{size}(A, b))$.*

Θεώρημα 19.1 *Το πρόβλημα $\Pi_0 = \{(A, b) \mid \exists x \text{ τέτοιο ώστε } Ax \le b\}$ ανήκει στο σύνολο* NP∩coNP.

Απόδειξη. Έστω $(A, b) \in \Pi_0$. Από το Λήμμα 19.1 υπάρχει ένα x_0 που αποδεικνύει ότι $(A, b) \in \Pi_0$ και έχει πολυωνυμικό μέγεθος ως πρός τα A, b. Άρα το Π_0 ανήκει στο NP.
Έστω $(A, b) \notin \Pi_0$, τότε, απο το Λήμμα Farkas για ανισότητες: $\exists y \ge 0$ τέτοιο ώστε $y^T A = 0$ και $y^T b \le -1$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 19.1 για το νέο σύστημα παίρνουμε ότι το μέγεθος του y είναι πολυωνυμικό ως προς τα A, b. Άρα το Π_0 ανήκει και στο coNP. ∎

Το πρόβλημα Π_0 του Θεωρήματος 19.1 αποδείχθηκε ότι ανήκει στο $\mathrm{P} \subseteq \mathsf{NP} \cap \mathsf{coNP}$ απο τον Leonid Khachiyan το 1979 χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Ελλειψοειδούς.

Προφανώς αν P = NP, έπεται ότι NP = coNP. Η αντίστροφη κατεύθυνση δεν είναι γνωστό αν ισχύει. Το ερώτημα $\mathsf{NP} \overset{?}{=} \mathsf{coNP}$ θα μπορούσε ίσως να είναι δυσκολότερο του ερωτήματος $\mathsf{P} \overset{?}{=} \mathsf{NP}$.

Αν και δεν γνωρίζουμε αν $\mathsf{P} \ne \mathsf{NP}$ είμαστε σε θέση να χαρακτηρίσουμε τα «δυσκολότερα» προβλήματα του NP. Αν για ένα από αυτά δείξουμε ότι ανήκει στο P έπεται ότι οι δύο κλάσεις ταυτίζονται. Αυτά είναι τα λεγόμενα NP-complete προβλήματα.

Ορισμός 19.6 *Το πρόβλημα απόφασης* Π_1 ανάγεται σε πολυωνυμικό χρόνο *στο πρόβλημα απόφασης* Π_2, *συμβολικά* $\Pi_1 \leq_P \Pi_2$, *αν υπάρχει συνάρτηση* f *τ. ώ.*

1. $\forall x \in \Sigma^*$, $x \in \Pi_1$ *ανν* $f(x) \in \Pi_2$.
2. *Η* f *υπολογίζεται σε πολυωνυμικό χρόνο στο* $size(x)$.

Η f *καλείται* αναγωγή από το Π_1 στο Π_2.

Πρόταση 19.1 *Αν η συνάρτηση* f *ορίζει αναγωγή* $\Pi_1 \leq_P \Pi_2$ *και η* g *ορίζει αναγωγή* $\Pi_2 \leq_P \Pi_3$, *η συνάρτηση* $g \circ f$ *ορίζει αναγωγή* $\Pi_1 \leq_P \Pi_3$.

Ορισμός 19.7 *Έστω* $\mathcal{C}$ *μία κλάση πολυπλοκότητας (ένα σύνολο προβλημάτων απόφασης). Ένα πρόβλημα* Π *καλείται* $\mathcal{C}$-complete *αν*

1. $\Pi \in \mathcal{C}$
2. $\forall\, \Pi' \in \mathcal{C}$, $\Pi' \leq_P \Pi$.

Δεν είναι προφανές ότι θα έπρεπε να υπάρχουν NP-complete προβλήματα. Υπάρχουν όμως και είναι χιλιάδες. Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας λογικών προτάσεων (Satisfiability) είναι το πρώτο ιστορικά που αποδείχθηκε NP-complete (Θεώρημα των Cook - Levin). Δεδομένου ενός NP-complete προβλήματος Π για να δείξουμε ότι ένα νέο πρόβλημα $\Pi' \in$ NP είναι NP-complete με βάση την Πρόταση 19.1 αρκεί να δείξουμε ότι $\Pi \leq_P \Pi'$. Από τον Ορισμό 19.7 προκύπτει επίσης άμεσα η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 19.2 *Αν* Π *είναι* NP-complete *πρόβλημα και* $\Pi \in$ P, *τότε* P $=$ NP.

Ορίζουμε το *συμπλήρωμα* μιας γλώσσας Π ως $\overline{\Pi} = \Sigma^* \setminus \Pi$. Μπορούν να αποδειχθούν οι ακόλουθες δύο προτάσεις.

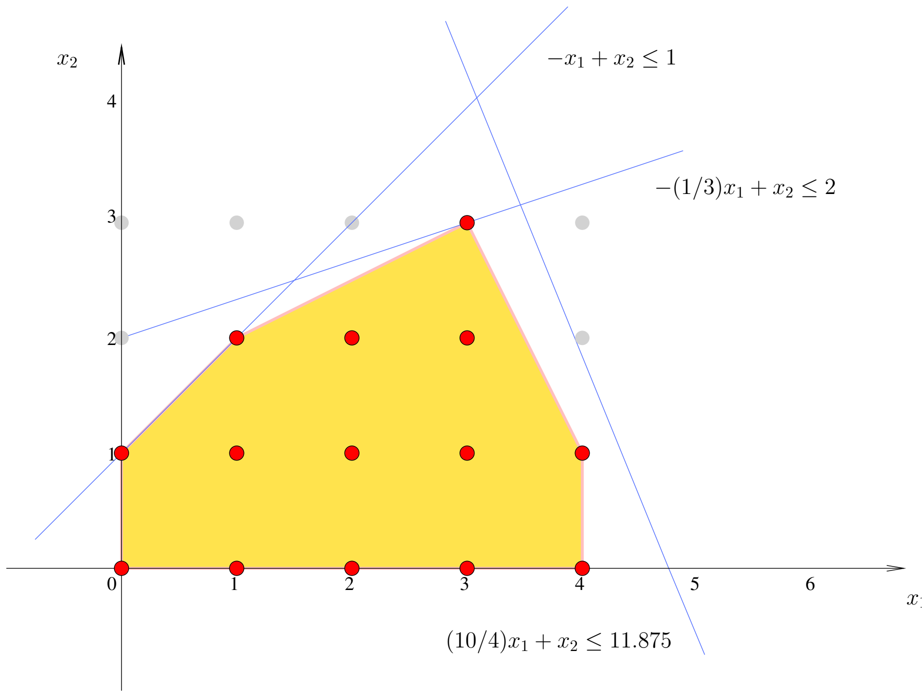
Πρόταση 19.3 *Αν το* Π *είναι* NP-complete *πρόβλημα τότε το* $\overline{\Pi}$ *είναι* coNP-complete.

Πρόταση 19.4 *Αν το* Π *είναι* NP-complete *πρόβλημα και* $\Pi \in$ coNP *τότε* NP $=$ coNP.

19.2 Ακέραιος γραμμικός προγραμματισμος

Ορισμός 19.8 *Αν* $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ *πολύεδρο, ορίζουμε ως το* ακέραιο κάλυμμα (integer hull) P_I *του* P *το κυρτό κάλυμμα των ακέραιων σημείων του* P *δηλ.*

$$P_I = \mathrm{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n).$$



Σχήμα 19.1: Το ακέραιο κάλυμμα του πολυέδρου $\{(x_1, x_2) \mid -x_1+x_2 \leq 1,\ -(1/3)x_1+x_2 \leq 2,\ (10/4)x_1+x_2 \leq 11.875,\ x_1, x_2 \geq 0\}$.

Αν το P είναι ρητό πολύεδρο (δηλ. όλοι οι συντελεστές στην H-περιγραφή του είναι ρητοί αριθμοί) το P_I είναι πάντοτε πολύεδρο. Βλ. Θεώρημα 19.4. Ένα παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 19.1. Ορίζουμε το ακόλουθο πρόβλημα απόφασης.

Πρόβλημα 19.2.1 ILP-Feasibility (ILPF)
Είσοδος: Πίνακας $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, διανύσματα $b \in \mathbb{Q}^m$, $c \in \mathbb{Q}^n$ και το βαθμωτό μέγεθος $\delta \in \mathbb{Q}$.
Ερώτημα: Υπάρχει κάποιο $x \in \mathbb{Z}^n$ τέτοιο ώστε $Ax \leq b$ και $c^T x > \delta$;

Το πρόβλημα ILP-Feasibility είναι NP-complete. Παραμένει NP-complete ακόμα και στις ειδικές περιπτώσεις όπου ο πίνακας A έχει μία γραμμή ή γνωρίζουμε ότι το πολύεδρο είναι μη κενό.

Για να δείξουμε την NP-πληρότητα του προβλήματος μπορούμε να ανάγουμε το πρόβλημα του Σακιδιου στο ILP-Feasibility. Έχουμε n αντικείμενα με μέγεθος $a_1, a_2, \ldots, a_n$ και αξία $c_1, c_2, \ldots c_n$ αντίστοιχα, χωρητικότητα σακιδίου B και θέλουμε να διαλέξουμε αντικείμενα που χωράνε στο σακίδιό και έχουν αξία μεγαλύτερη από δ. Το πρόβλημα του Σακιδιου γράφεται σαν ακέραιο πρόγραμμα:

$$
\begin{gathered}
a^T x \leq B \\
c^T x > \delta \\
0 \leq x_i \leq 1,\ x_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, 2, \ldots, n
\end{gathered}
$$

Τετριμμένα το Πρόβλημα του Σακιδίου είναι NP-complete ακόμα και αν $a_i \leq B$ για κάθε $i \in [n]$. Σε συνδυασμό με το Παράδειγμα 12.1 προκύπτει η ακόλουθη παρατήρηση.

Παρατήρηση 19.1 *Αν $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ το Πρόβλημα 19.2.1 παραμένει* NP-complete *και όταν* $\dim(P_I) = n$.

Το παρακάτω λήμμα προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι το ILPF είναι NP-complete και την Πρόταση 19.4.

Λήμμα 19.2 NP $=$ coNP $\Leftrightarrow$ ILPF $\in$ coNP.

Το θεώρημα που ακολουθεί δείχνει ότι δοθείσης μιας H-περιγραφής της γραμμικής χαλάρωσης (linear relaxation) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ενός ακέραιου πολυέδρου, η περιγραφή των εδρών του είναι υπολογιστικά δύσβατο (intractable) πρόβλημα.

Θεώρημα 19.2 *[1] Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. NP $\neq$ coNP.
2. *Δεν υπάρχει πολυώνυμο ϕ τέτοιο ώστε, για κάθε ρητό πίνακα A και ρητό διάνυσμα b και για κάθε ανισότητα $f^T x \leq g$ που ορίζει έδρα του P_I (όπου $P = \{x \mid Ax \leq b\}$ και $P_I \neq \varnothing$), το γεγονός ότι $f^T x \leq g$ είναι έγκυρη ανισότητα για το P_I, να έχει απόδειξη μεγέθους το πολύ $\phi(\mathrm{size}(A, b, f, g))$.*

Απόδειξη.
$(2) \Rightarrow (1)$
Δεχόμενοι τη δεύτερη πρόταση θα δείξουμε ότι NP $\neq$ coNP. Με αντιθετοαντιστροφή, δεχόμαστε ότι NP $=$ coNP και θα δείξουμε την άρνηση της (2). Απο το Λήμμα 19.2 ILPF $\in$ coNP. Δηλαδή, δεδομένης μιας εισόδου (A, b, c, δ) του ILPF η αρνητική απάντηση στο πρόβλημα απόφασης έχει απόδειξη πολυωνυμικού μεγέθους (είτε η $c^T x \leq \delta$ ορίζει έδρα του P_I είτε όχι). Αρνητική απάντηση στο ερώτημα του ILPF προβλήματος σημαίνει ότι για κάθε $x \in \mathbb{Z}^n$ τέτοιο ώστε $Ax \leq b$, ισχύει ότι $c^T x \leq \delta$. Άρα καταλήγουμε ότι υπάρχει απόδειξη πολυωνυμικού μεγέθους για το ότι η $c^T x \leq \delta$ είναι έγκυρη ανισότητα για το P_I. Αποδείξαμε την άρνηση της (2).

$(1) \Rightarrow (2)$
Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι αντιθετοαντιστροφή. Έστω ότι υπάρχει τέτοιο πολυώνυμο ϕ που ικανοποιεί της συνθήκες της (2). Θα δείξουμε ότι NP $=$ coNP. Για να το πετύχουμε αυτό, θα βρούμε απόδειξη πολυωνυμικού μεγέθους για στιγμιότυπα του ILPF για τα οποία η απάντηση είναι ΌΧΙ. Με αυτό τον τρόπο θα έχουμε δείξει ότι ILPF $\in$ coNP. Τότε από το Λήμμα 19.2 θα έχουμε ότι NP $=$ coNP.

Θεωρούμε ότι η $c^T x \leq \delta$ είναι έγκυρη ανισότητα για το P_I όπου $P = \{x \mid Ax \leq b\}$. Τότε το ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{τ. ώ.} \quad & x \in P_I \end{aligned} \tag{LP1}$$

έχει βέλτιστη τιμή το πολύ δ. Δεδομένης της Παρατήρησης 19.1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι το P_I είναι πλήρους διάστασης. Υπάρχει πίνακας F με n στήλες και διάνυσμα g τ. ώ. $P_I = \{x \mid Fx \leq g\}$ και οι γραμμές του πίνακα αντιστοιχούν στις έδρες του P_I. Είναι γνωστό ότι η αναπαράσταση κάθε εδραίας ανισότητας του P_I έχει μέγεθος poly(size(A, b)) (Βλ. Πόρισμα 17.1α στο [4]). Το δυϊκό του (LP1) είναι το ακόλουθο

$$\begin{aligned} \min \quad & g^T y \\ \text{τ. ώ.} \quad & y^T F = c^T \\ & y \geq 0 \end{aligned} \tag{LP2}$$

και με βάση τα παραπάνω έχει βέλτιστη τιμή το πολύ δ. Άρα υπάρχει μια βασική εφικτή λύση του (LP2) με τιμή το πολύ δ. Εξ ορισμού μια τέτοια λύση έχει το πολύ n μη μηδενικές τιμές. Κατά συνέπεια υπάρχει $n \times n$ υποπίνακας F' του F που περιέχει τις γραμμές $i_1, i_2, \ldots, i_n$ και διάνυσμα $y' \geq 0$ τ. ώ.

$$(y')^T F' = c \quad \text{και } (g')^T y \leq \delta. \tag{19.1}$$

Για το διάνυσμα g' ισχύει ότι $g' = (g_{i_1}, \ldots, g_{i_n})^T$. Μπορούμε να υποθέσουμε (βλ. Θεώρημα 10.2 στο [4]) ότι το μέγεθος της αναπαράστασης του y' φράσσεται από poly(size(A, b, c)). Βάσει της υπόθεσης, για κάθε ανισότητα από τις παρακάτω

$$f_{i_j}^T x \leq g_{i_j}, \;\; j = 1, \ldots, n \tag{19.2}$$

υπάρχει απόδειξη μεγέθους[1] poly(size(A, b)) ότι είναι έγκυρη για το P_I. Οι n αυτές αποδείξεις σε συνδυασμό με τις σχέσεις (19.1) συνιστούν αθροιστικά μία απόδειξη μεγέθους poly(size(A, b, c, δ)) ότι η απάντηση για την είσοδο $< A, b, c, \delta >$ του ILPF είναι ΌΧΙ. Άρα ILPF $\in$ coNP. ∎

Το σκέλος (2) του Θεωρήματος 19.2 μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής. Δεν υπάρχει σύνολο $L \in$ NP τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} &\{(A, b, c, \delta) \mid c^T x \leq \delta \text{ ορίζει έδρα του } \{x \mid Ax \leq b\}_I\} \subseteq L \\ &\subseteq \{(A, b, c, \delta) \mid c^T x \leq \delta \text{ έγκυρη για το } \{x \mid Ax \leq b\}_I\}. \end{aligned}$$

Θεώρημα 19.3 *[3] Το παρακάτω πρόβλημα είναι* NP-complete*:*

Δίνεται ρητό σύστημα $Ax \leq b$, $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ και διάνυσμα y. Ανήκει το y στο P_I; (19.3)

Απόδειξη. Το πρόβλημα ανήκει στο NP γιατί οι κορυφές του P_I έχουν μέγεθος πολυωνυμικό στο size(A, b) και αν $y \in P_I$ από το Θεώρημα του Καραθεοδωρή υπάρχουν το πολύ $n + 1$ κορυφές που ο κυρτός τους συνδυασμός να δίνει το y. Οι συντελεστές του κυρτού συνδυασμού έχουν μέγεθος το πολύ πολυωνυμικό στο size(A, b, y).

[1] για το μέγεθος χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι ανισότητες (19.2) είναι εδραίες και όχι απλά έγκυρες για το P_I. Το μέγεθος μιας τυχούσας έγκυρης ανισότητας για το P_I δεν φράσσεται πολυωνυμικά από το size(A, b).

Κάνουμε αναγωγή απο το πρόβλημα της Διαμερισης (Partition) που ορίζεται ως εξής. Δίνεται σύνολο $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $a_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, $i = 1, \dots, n$. Να αποφασιστεί αν υπάρχει $S \subseteq A$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{i \in S} a_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Έστω λοιπόν ένα σύνολο A και P^A το πολύεδρο που ορίζεται απο το σύστημα:

$$\begin{aligned} &a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ &0 \leq \xi_i \leq 1,\ i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{19.4}$$

Ισχυρισμός 19.1 *Αν* $y = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})^T$ *τότε* $y \in P_I^A \Leftrightarrow$ *το σύστημα* (19.4) *έχει ακέραια λύση.*

Απόδειξη ισχυρισμού. Έστω διάνυσμα $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \in \{0,1\}^n$. Το διάνυσμα ξ ανήκει στο ακέραιο πολύεδρο P_I^A αν και μόνον αν το συμπληρωματικό του $\mathbf{1} - \xi$ ανήκει στο P_I^A. Ο λόγος είναι ότι το σύνολο $S = \{i \mid \xi_i = 1\}$ είναι λύση αν και μόνο αν $\sum_{i \in S} a_i = \sum_{i \notin S} a_i$. Δηλαδή:

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \in P \cap \mathbb{Z}^n \Leftrightarrow (1 - \xi_1, 1 - \xi_2, \dots, 1 - \xi_n)^T \in P \cap \mathbb{Z}^n.$$

Παρατηρήστε ότι $y = \frac{1}{2}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T + \frac{1}{2}(1 - \xi_1, 1 - \xi_2, \dots, 1 - \xi_n)^T$. Επομένως αν υπάρχει ακέραια λύση $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ του (19.4), το y είναι κυρτός συνδυασμός κορυφών του P_I^A, άρα ανήκει στο P_I^A. Αντιστρόφως, αν $y \in P_I^A$, τότε το P_I^A είναι μη κενό, άρα το (19.4) έχει ακέραια λύση. ∎

Αποδείξαμε ότι $y \in P_I^A$ αν και μόνο αν η απάντηση στην είσοδο A του προβλήματος της Διαμερισης είναι καταφατική. Αυτό ολοκληρώνει την αναγωγή, άρα το πρόβλημα (19.3) είναι NP-complete. ∎

Το Θεώρημα 19.3 είναι ισχυρότερο από το Θεώρημα 19.2. Μπορούμε να το εφαρμόσουμε για να αποδείξουμε ως εξής την κατεύθυνση (1) $\Rightarrow$ (2) του Θεωρήματος 19.2.

Χρησιμοποιούμε αντιθετοαναστροφή. Αν υπάρχει πολυώνυμο με τις ιδιότητες που ορίζει το (2) του Θεωρήματος 19.2 τότε κάθε αρνητική απάντηση στο Πρόβλημα (19.3) έχει απόδειξη πολυωνυμικού μεγέθους. Η απόδειξη αποτελείται από μία εδραία ανισότητα του P_I η οποία παραβιάζεται από το y μαζί με μια πολυωνυμική απόδειξη ότι η ανισότητα είναι όντως έγκυρη για το P_I. Άρα το Πρόβλημα (19.3) ανήκει στο coNP. Απο το Θεώρημα 19.3 ξέρουμε ότι το πρόβλημα είναι NP-complete. Επομένως, NP=coNP.

Το Θεώρημα 19.2 παρέχει μια έμμεση ένδειξη για τη δυσκολία του προβλήματος αναγνώρισης των εδρών ενός πολυτόπου που εκφράζει ένα NP-complete πρόβλημα. Στο [3] ορίστηκε η κλάση πολυπλοκότητας D^p που περιέχει όλες τις γλώσσες που είναι τομή μιας γλώσσας του NP και μιας γλώσσας του coNP. Το πρόβλημα αναγνώρισης εδρών του πολυτόπου της κλίκας [3] όπως και του TSP [2] είναι D^p-complete.

*19.3 Ακέραιο κάλυμμα πολυέδρου

Πρόταση 19.5 *Αν το P είναι πολύτοπο, τότε το P_I είναι πολύτοπο.*

Απόδειξη. Αν το P είναι φραγμένο, το $P \cap \mathbb{Z}^n$ είναι πεπερασμένο, οπότε τετριμμένα το P_I είναι πολύτοπο. ∎

Παρατηρήστε ότι για οποιονδήποτε ρητό πολυεδρικό κώνο $C \subseteq \mathbb{R}^n$ μιας και παράγεται από ρητά διανύσματα, μπορούμε χβτγ να υποθέσουμε ότι παράγεται από διανύσματα στο $\mathbb{Z}^n$.

Λήμμα 19.3 *Αν C είναι ρητός πολυεδρικός κώνος, τότε $C_I = C$.*

Απόδειξη. Προφανώς $C_I \subseteq C$. Θα δείξουμε ότι $C \subseteq C_I$. Από το Θεώρημα Minkowski-Weyl για κώνους, ο C παράγεται από ένα πεπερασμένο πλήθος t ρητών διανυσμάτων. Άρα παράγεται και από ένα πεπερασμένο πλήθος ακέραιων διανυσμάτων από το $\mathbb{Z}^n$ έστω από τα $r_1, \dots, r_t$. Θεωρούμε $x \in C$ δηλ. υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_t \geq 0$, τ. ώ. $x = \sum_{i=1}^t \lambda_i r_i$.

Ορίζουμε $\mu = \sum_{i=1}^t \lambda_i$, $p_i := \lceil \mu \rceil r_i$, $i \in [t]$. Προφανώς $p_i \in C \cap \mathbb{Z}^n$, για κάθε $i \in [t]$. Επίσης $x = \sum_{i=1}^t (\lambda_i / \lceil \mu \rceil) p_i$.

Ορίζουμε $\xi_i = \lambda_i / \lceil \mu \rceil$, $i \in [t]$ και $\xi_0 = 1 - \sum_{i=1}^t \xi_i$. Τότε $x = \sum_{i=1}^t \xi_i p_i + \xi_0 \mathbf{0}$. Επομένως $x \in \operatorname{conv}(C \cap \mathbb{Z}^n)$. ∎

Θεώρημα 19.4 *Για οποιοδήποτε ρητό πολύεδρο P, το P_I είναι επίσης πολύεδρο. Αν $P_I \neq \varnothing$, τότε $\operatorname{rec}(P_I) = \operatorname{rec}(P)$.*

Απόδειξη. Έστω $P = Q + C$ όπου Q πολύτοπο και C ο χαρακτηριστικός κώνος, δηλαδή $C = \operatorname{rec}(P)$. Έστω ότι ο C παράγεται από τα ακέραια διανύσματα $y_1, \dots, y_t$. Ορίζουμε το πολύτοπο

$$B := \{\sum_{i=1}^t \mu_i y_i \mid 0 \leq \mu_i \leq 1,\ i \in [t]\}.$$

Θα δείξουμε ότι $P_I = (Q+B)_I + C$. Αφού το $Q+B$ είναι πολύτοπο, από την Πρόταση 19.5 το $(Q+B)_I$ είναι πολύτοπο, άρα το $(Q+B)_I + C$ είναι πολύεδρο.

Δείχνουμε πρώτα ότι $P_I \subseteq (Q+B)_I + C$. Έστω $x \in P_I \cap \mathbb{Z}^n$. Θα δείξουμε ότι $x \in (Q+B)_I + C$. Αυτό αρκεί γιατί αν όλα τα ακέραια σημεία του P_I ανήκουν στο πολύεδρο $(Q+B)_I + C$, το ίδιο θα ισχύει για οποιονδήποτε κυρτό συνδυασμό τους. Γνωρίζουμε ότι $x = q + c$, όπου $q \in Q$, $c \in C$. Επίσης $c = b + c'$, όπου $b \in B$ και $c' \in C \cap \mathbb{Z}^n$. Άρα $x = (q+b) + c'$. Όμως $(q+b) \in (Q+B)_I$ μιας και $q + b = x - c'$ και $x, c' \in \mathbb{Z}^n$. Επομένως $x \in (Q+B)_I + C$.

Αντιστρόφως, $(Q+B)_I + C \subseteq P_I + C = P_I + C_I \subseteq (P+C)_I = P_I$, όπου στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα 19.3.

Άρα $P_I = (Q+B)_I + C$. Αν το P_I είναι μη κενό, τότε από την Πρόταση 10.1, $C = \operatorname{rec}(P_I)$. ∎

Είναι ενδιαφέρον ότι για μη ρητό P, το P_I δεν είναι απαραίτητα πολύεδρο. Αφήνεται σαν άσκηση να βρεθεί αντιπαράδειγμα.

*19.4 Ισοδυναμία προβλημάτων απόφασης και εύρεσης για συστήματα ανισοτήτων

Σε αυτή την ενότητα δείχνουμε ότι το πρόβλημα απόφασης και το πρόβλημα εύρεσης λύσης για συστήματα γραμμικών ανισοτήτων είναι *πολυωνυμικά ισοδύναμα*. Δηλ. αν το ένα λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο, τότε λύνεται και το άλλο, και αντιστρόφως.

Πρόβλημα 19.4.2 Εφικτότητα γραμμικού συστήματος
Είσοδος: Πίνακας $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$.
Ερώτημα: Το σύστημα $Ax \le b$ έχει λύση;

Πρόβλημα 19.4.3 Εύρεση λύσης γραμμικού συστήματος
Είσοδος: Πίνακας $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$.
Έξοδος: Λύση του συστήματος $Ax \le b$ αν υπάρχει τέτοια.

Θεώρημα 19.5 *Τα Προβλήματα 19.4.2 και 19.4.3 είναι πολυωνυμικά ισοδύναμα.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι αν το 19.4.2 είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο τότε είναι και το 19.4.3. Περιγράφουμε έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο για τη επίλυση ενός ρητού γραμμικού συστήματος με m περιορισμούς όπου t είναι περιορισμοί ανισότητας και $m-t$ είναι περιορισμοί ισότητας ($m \ge t$):

$$a_1^T x \le b_1, \dots, a_t^T x \le b_t,\ a_{t+1}^T x = b_{t+1}, \dots, a_m^T x = b_m. \tag{19.5}$$

Αν $t = 0$, βρίσκουμε λύση του συστήματος εξισώσεων με απαλοιφή Gauss. Αν $t > 0$ πρώτα ελέγχουμε αν το σύστημα 19.5 είναι εφικτό χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο για το Πρόβλημα 19.4.2. Αν όχι, ο αλγόριθμος τερματίζει. Αν είναι εφικτό, αναδρομικά βρίσκουμε μία λύση για το πρόβλημα

$$a_1^T x \le b_1, \dots, a_{t-1}^T x \le b_{t-1},\ a_t^T x = b_t,\ a_{t+1}^T x = b_{t+1}, \dots, a_m^T x = b_m. \tag{19.6}$$

εάν αυτή υπάρχει. Αν βρήκαμε τέτοια λύση $\bar{x}$ τότε αυτή είναι και λύση του 19.5. Αν το σύστημα 19.6 δεν έχει λύση, συμπεραίνουμε ότι η ανισότητα $a_t^T x \le b_t$ είναι πλεονάζουσα για το σύστημα 19.5. Καλώντας αναδρομικά τον αλγόριθμο βρίσκουμε λύση για το σύστημα

$$a_1^T x \le b_1, \dots, a_{t-1}^T x \le b_{t-1},\ a_{t+1}^T x = b_{t+1}, \dots, a_m^T x = b_m. \tag{19.7}$$

η οποία θα είναι επίσης και λύση του 19.5. ∎

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι το πρόβλημα επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος ανισώσεων είναι πολυωνυμικά ισοδύναμο με το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού.

Πρόβλημα 19.4.4 ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ
Είσοδος: Πίνακας $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$, $c \in \mathbb{Q}^n$.
Έξοδος: Χαρακτηρισμός του γραμμικού προγράμματος $\max\{c^T x \mid Ax \le b\}$ ως ανέφικτου, φραγμένου, μη φραγμένου. Αν είναι φραγμένο, να βρεθεί μια βέλτιστη λύση. Αν είναι μη φραγμένο, να βρεθεί μια εφικτή λύση x_0 και διάνυσμα z τ. ώ. $Az \le 0$ και $c^T z > 0$.

Θεώρημα 19.6 *Τα Προβλήματα 19.4.3 και 19.4.4 είναι πολυωνυμικά ισοδύναμα.*

Απόδειξη. Αν το Πρόβλημα 19.4.4 είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο, τότε λύνεται και το 19.4.3. Αρκεί να θέσουμε $c = \mathbf{0}$.

Αντιστρόφως έστω ότι διαθέτουμε πολυωνυμικό αλγόριθμο για το 19.4.3. Θα δείξουμε πώς μπορεί να επιλυθεί το 19.4.4. Ελέγχουμε αν το σύστημα $Ax \le b$ είναι επιλύσιμο και αν ναι, βρίσκουμε μία λύση x_0. Πάλι τρέχοντας τον αλγόριθμο για το Πρόβλημα 19.4.3 ελέγχουμε αν είναι εφικτό το σύστημα $y^T A = c,\ y \ge 0$. Αν ναι, γνωρίζουμε από το Θεώρημα 8.4 ότι το σύστημα

$$Ax \le b,\ y^T A = c,\ y \ge 0,\ c^T x \ge b^T y$$

είναι εφικτό και μπορούμε τρέχοντας τον αλγόριθμο για το 19.4.3 να βρούμε μία λύση του (x^*, y^*). Από Ισχυρή Δυϊκότητα το x^* είναι βέλτιστη λύση για το γραμμικό πρόγραμμα $\max\{c^T x \mid Ax \le b\}$.

Αν το σύστημα $y^T A = c,\ y \ge 0$ είναι ανέφικτο, γνωρίζουμε αφενός από το Θεώρημα 8.4 ότι το γραμμικό πρόγραμμα $\max\{c^T x \mid Ax \le b\}$ είναι μη φραγμένο, αφετέρου από το Πόρισμα 7.1 (Λήμμα Farkas) ότι υπάρχει z τ. ώ. $Az \le 0$ και $c^T z = 1$. Ένα τέτοιο z μπορεί να υπολογιστεί με τον αλγόριθμο για το Πρόβλημα 19.4.3. ∎

Αναφορές

[1] Richard M. Karp and Christos H. Papadimitriou. On linear characterizations of combinatorial optimization problems. *SIAM J. Comput.*, 11(4):620–632, 1982.

[2] Christos H. Papadimitriou and David Wolfe. The complexity of facets resolved. *J. Comput. Syst. Sci.*, 37(1):2–13, 1988.

[3] Christos H. Papadimitriou and Mihalis Yannakakis. The complexity of facets (and some facets of complexity). *J. Comput. Syst. Sci.*, 28(2):244–259, 1984.

[4] A. Schrijver. *Theory of linear and integer programming.* John Wiley and Sons, 1986.