Γραφείς: Σάμαρης Μιχάλης & Σ. Κ.

20.1 Ακέραια Πολύεδρα

Ορισμός 20.1 *Έστω ένα πολύεδρο $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Το P καλείται ακέραιο αν $P = P_I$ δηλαδή αν*

$$P = \operatorname{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n).$$

Το επόμενο θέωρημα παρουσιάζει ισοδύναμους χαρακτηρισμούς των ακέραιων πολυέδρων.

Θεώρημα 20.1 *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για ένα ρητό πολύεδρο P:*

(i) Το πολύεδρο P είναι ακέραιο, δηλ. $P = P_I$.

(ii) Κάθε μη κενή όψη του P περιέχει ένα ακέραιο διάνυσμα.

(iii) Κάθε ελαχιστική όψη του P περιέχει ένα ακέραιο διάνυσμα.

(iv) υπάρχει βέλτιστη λύση του $\max\{c^T x \mid x \in P\}$ η οποία είναι ακέραιο διάνυσμα, για κάθε c για το οποίο το βέλτιστο είναι φραγμένο.

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii): Έστω F όψη του πολυέδρου όπου $F = P \cap H$ και H είναι ένα υπερεπίπεδο στήριξης. Θεωρούμε $x \in F$. Επειδή $P = P_I$, από τον Ορισμό 1.4, το x είναι κυρτός συνδυασμός ενός πεπερασμένου συνόλου σημείων $S \subseteq P \cap \mathbb{Z}^n$. Επειδή $x \in H$, όλα τα σημεία του S πρέπει να ανήκουν στο H άρα και στην F.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Προφανές.
(iii) $\Rightarrow$ (iv): Έστω $\delta = \max\{c^T x \mid x \in P\} < +\infty$, τότε $F = \{x \in P \mid c^T x = \delta\}$ είναι όψη του P. Θεωρούμε ελαχιστική όψη F' του πολυέδρου F. Η F' θα είναι ελαχιστική όψη του P η οποία λόγω της (iii) θα περιέχει ένα ακέραιο διάνυσμα.
(iv) $\Rightarrow$ (i): Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $y \in P \setminus P_I$. Από το Θεώρημα 19.4, το P_I είναι πολύεδρο. Τότε πρέπει να υπάρχει ανισότητα $\alpha^T x \leq \beta$ η οποία είναι έγκυρη για το P_I αλλά παραβιάζεται από το y, δηλ. $\alpha^T y > \beta$. Επομένως $\max\{\alpha^T x \mid x \in P_I\} \leq \beta$ ενώ $\max\{\alpha^T x \mid x \in P\} \geq \alpha^T y > \beta$. Άρα η (iv) παραβιάζεται για $c = \alpha$. ∎

Το επόμενο θέωρημα δίνει μια ακόμα ικανή και αναγκαία συνθήκη εκτός των (ii)-(iv) για να είναι ένα πολύτοπο P ακέραιο.

Θεώρημα 20.2 (Hoffman 1974) *Έστω ρητό πολύτοπο $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Το P είναι ακέραιο ανν το $\max\{w^T x \mid x \in P\}$ είναι ακέραιος αριθμός για κάθε $w \in \mathbb{Z}^n$ για το οποίο το βέλτιστο είναι φραγμένο.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Προφανής γιατί αφού το P είναι ακέραιο, τα διανύσματα των κορυφών είναι ακέραια. Θα υπάρχει κορυφή του P που είναι βέλτιστη λύση, άρα θα είναι και η βέλτιστη τιμή ακέραια.

($\Leftarrow$) Έστω $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ μια κορυφή του πολυτόπου P. Από το Θεώρημα 3.2 γνωρίζουμε ότι υπάρχει ρητό διάνυσμα $\overline{w}$ τέτοιο ώστε το v είναι η μοναδική λύση του γραμμικού προγράμματος $\max\{\overline{w}^T x \mid x \in P\}$.

Πολλαπλασιάζοντας το $\overline{w}$ με το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των παρονομαστών των συντεταγμένων του προκύπτει το $w \in \mathbb{Z}^n$ για το οποίο ισχύει ότι το v είναι η μοναδική λύση του γραμμικού προγράμματος $\max\{w^T x \mid x \in P\}$. Έπεται ότι $w^T v > w^T u, \forall u \in P$ με $u \neq v$. Από την υπόθεση $w^T v \in \mathbb{Z}$. Θεωρούμε το διάνυσμα $w' = (w_1 + 1, w_2, \ldots, w_n)^T$. Πολλαπλασιάζοντας, αν χρειάζεται, το w με κατάλληλο θετικό ακέραιο θα ισχύει ότι $w^T v > w^T u + u_1 - v_1 \Leftrightarrow w^T v + v_1 > w^T u + u_1 \Leftrightarrow (w')^T v > (w')^T u$. Επομένως $v = \arg\max\{(w')^T x \mid x \in P\}$ και αφού $(w')^T v = w^T v + v_1$ και $w^T v$ ακέραιοι τότε και $v_1 \in \mathbb{Z}$. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $v_i \in \mathbb{Z}$ για κάθε $i \in [n]$ και τελικά καταλήγουμε ότι $v \in \mathbb{Z}^n$. ∎

Το θεώρημα επεκτάθηκε σε πολύεδρα από τους Edmonds και Giles.

Θεώρημα 20.3 ([2]) *Έστω ρητό πολύεδρο $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Το P είναι ακέραιο ανν για κάθε ακέραιο διάνυσμα w η βέλτιστη τιμή του $\max\{w^T x \mid x \in P\}$ είναι ακέραιος αριθμός αν είναι πεπερασμένη.*

20.2 Ολική δυϊκή ακεραιότητα (ΟΔΑ)

Ο επόμενος ορισμός σε συνδυασμό με το Θεώρημα 20.4 εισάγει μια νέα συνθήκη για την ακεραιότητα ενός πολυέδρου.

Ορισμός 20.2 ([2]) *Ένα ρητό σύστημα $Ax \leq b$ καλείται* ολικά δυϊκό ακέραιο (totally dual integral, TDI) *αν στην εξίσωση $\max\{w^T x \mid Ax \leq b\} = \min\{y^T b \mid y^T A = w^T, y \geq 0\}$ το min πετυχαίνεται από ακέραιο διάνυσμα y, για κάθε ακέραιο w για το οποίο το βέλτιστο ορίζεται και είναι φραγμένο.*

Θεώρημα 20.4 *Έστω $Ax \leq b$ ένα TDI σύστημα τέτοιο ώστε το $P = \{x \mid Ax \leq b\}$ να είναι ρητό πολύεδρο και b ακέραιο διάνυσμα. Τότε το P είναι ακέραιο πολύεδρο.*

Απόδειξη. Αφού το b είναι ακέραιο διάνυσμα, τότε το $\max\{w^T x \mid x \in P\}$ είναι ακέραιο για κάθε ακέραιο διάνυσμα w. Από το Θεώρημα 20.3 το P είναι ακέραιο. ∎

Σημειώνουμε ότι TDI είναι ιδιότητα του συστήματος $Ax \leq b$ και όχι του πολυέδρου $\{x \mid Ax \leq b\}$. Επίσης, κάθε ρητό πολύεδρο μπορεί να οριστεί από TDI σύστημα.

Πρόταση 20.1 ([3]) *Για οποιοδήποτε ρητό σύστημα $Ax \leq b$, $\exists \alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$ τέτοιο ώστε το σύστημα $\alpha Ax \leq \alpha b$ να είναι TDI.*

Απόδειξη. Για κάθε ρητό διάνυσμα $v = (a_1/b_1, \ldots, a_m/b_m)$, με $a_i \in \mathbb{Z}, b_i \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$, $i \in [m]$, αν θέσουμε $\gamma = \mathrm{lcm}(b_1, \ldots, b_m)$, παίρνουμε ότι το διάνυσμα γv ανήκει στο $\mathbb{Z}^m$. Είναι επομένως εύκολο να δειχτεί ότι για οποιοδήποτε ακέραιο w υπάρχει αριθμός α έτσι ώστε το πολύεδρο $\{y \in \mathbb{R}^m \mid y^T(\alpha A) = w^T, y \geq 0\}$ να είναι ακέραιο πολύεδρο αφού αν πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα A με α, όλα τα ακραία σημεία πολλαπλασιάζονται με $1/\alpha$. Πρέπει όμως να δείξουμε ότι μπορούμε να διαλέξουμε ένα α που δουλεύει για κάθε ακέραιο w.

Υποθέτουμε χβτγ ότι τα στοιχεία του $m \times n$ πίνακα A είναι ακέραιοι. Θεωρούμε το σύστημα

$$A^T y = w,\ y \geq 0. \tag{20.1}$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\text{rank}(A^T) = n$ ειδάλλως, κάποιες από τις n εξισώσεις του συστήματος είναι πλεονάζουσες. Από το Θεώρημα 4.2, κάθε βασική λύση y^* του (20.1) είναι λύση ενός συστήματος $By = w$ όπου B είναι ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ υποπίνακας του A. Από τον Κανόνα του Cramer (βλ. Θεώρημα 20.7) οι συνιστώσες του y^* είναι ρητοί αριθμοί με παρονομαστή ίσο με $\det(B)$. Αν ορίσουμε N να είναι το σύνολο των αντιστρέψιμων $n \times n$ υποπινάκων του A και θέσουμε

$$\beta = |\prod_{B \in N} \det(B)| \text{ και } \alpha = 1/\beta,$$

τότε κάθε βασική εφικτή λύση του $y^T(\alpha A) = w^T,\ y \geq 0$ είναι ακέραιο διάνυσμα, για κάθε $w \in \mathbb{Z}^n$. ∎

Αν το σύστημα $Ax \leq b$ δεν είναι TDI υπάρχει ακέραιο διάνυσμα c για το οποίο δεν υπάρχει ακέραιη βέλτιστη λύση του $\min\{y^T b \mid y^T A = c,\ y \geq 0\}$. Το c μπορεί να επιλεγεί ώστε να έχει μέγεθος πολυωνυμικό στο μέγεθος του A. Αν $c = y^T A$ για κάποιο μη ακέραιο $y \geq 0$, τότε και το $c' = (y - \lfloor y \rfloor)^T A$ είναι αντιπαράδειγμα για την TDI ιδιότητα. Αποδείξαμε ότι το πρόβλημα «είναι το σύστημα $Ax \leq b$ TDI;» ανήκει στο coNP. Μπορεί να αποδειχθεί ότι και το πρόβλημα «το σύστημα $Ax \leq b$ ορίζει ακέραιο πολύεδρο;» ανήκει επίσης στο coNP [4][Ενότητα 22.9]. Γνωρίζουμε ότι και τα δύο προβλήματα είναι υπολογιστικά δύσβατα:

Θεώρημα 20.5 ([1]) *Έστω A ένας 0-1 πίνακας με ακριβώς δύο 1 σε κάθε στήλη. Τα προβλήματα απόφασης για το αν το σύστημα $Ax \geq \mathbf{1},\ x \geq \mathbf{0}$*

(1) ορίζει ακέραιο πολύεδρο, και

(2) είναι TDI

είναι coNP-complete.

20.3 Εναλλακτικός ορισμός της ΟΔΑ

Για ένα ρητό σύστημα $Ax \leq b$ μπορούμε χβτγ να υποθέσουμε ότι $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ και $b \in \mathbb{Z}^m$. Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε έναν ισοδύναμο χαρακτηρισμό των ολικά δυϊκών ακέραιων συστημάτων.

Έστω $F \subseteq \mathbb{Z}^n$. Ένα σύνολο $H \subseteq F$ καλείται *ακέραιο γεννητικό σύνολο (integer generating set)* του F αν για κάθε $x \in F$ υπάρχει $\{h_1, \ldots, h_k\} \subseteq H$ και συντελεστές $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ έτσι ώστε

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i h_i.$$

Στη βιβλιογραφία ένα ακέραιο γεννητικό σύνολο του F καλείται κάποιες φορές *ακέραια βάση Hilbert* του F. Αν $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ρητός πολυεδρικός κώνος δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι για το σύνολο $F = C \cap \mathbb{Z}^n$ υπάρχει ακέραιο γεννητικό σύνολο. Επιστρέφουμε τώρα στην έννοια της ολικής δυϊκής ακεραιότητας.

Θεώρημα 20.6 *Έστω $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ και $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Το σύστημα $Ax \leq b$ είναι ολικά δυϊκό ακέραιο ανν για κάθε όψη $F = \{x \in P \mid A_I x = b_I\}$, $I \subseteq [m]$, του πολυέδρου P το σύνολο διανυσμάτων $\{a_i \mid i \in I\}$ ορίζει ένα ακέραιο γεννητικό σύνολο των σημείων του συνόλου* $\mathrm{cone}(\{a_i \mid i \in I\}) \cap \mathbb{Z}^n$.

Απόδειξη. Έστω ότι το σύστημα $Ax \leq b$ ικανοποιεί τον Ορισμό 20.2. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $w \in \mathbb{Z}^n$ για το οποίο το πρόβλημα

$$\begin{aligned} \min\ & b^T y \\ y^T A &= w^T \\ y &\geq 0. \end{aligned} \tag{D}$$

είναι φραγμένο, το πρόβλημα (D) έχει ακέραιη βέλτιστη λύση $y^* \in \mathbb{Z}^m$. Έστω F μια μη κενή όψη του πολυέδρου $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Από το Θεώρημα 12.2, υπάρχει $I \subseteq [m]$ έτσι ώστε

$$F = \{x \in P \mid A_I x = b_I\}.$$

Δηλ., το I δεικτοδοτεί τους περιορισμούς που ικανοποιούνται με ισότητα από *όλα* τα σημεία του F.

Έστω w τυχόν διάνυσμα του συνόλου $\mathrm{cone}(\{a_i \mid i \in I\}) \cap \mathbb{Z}^n$. Άρα υπάρχει $\bar{y} \geq 0$, έ. ώ. $w^T = \bar{y}^T A$ και

$$\bar{y}_i = 0, \text{ αν } i \notin I. \tag{20.2}$$

Για κάθε $x \in P$ και $\bar{x} \in F$ έχουμε

$$w^T x = \bar{y}^T A x \leq \bar{y}^T b \overset{(20.2)}{=} \bar{y}^T A \bar{x} = w^T \bar{x}.$$

Επομένως τα σημεία της όψης F είναι βέλτιστες λύσεις στο πρόβλημα

$$\begin{aligned} \max\ & w^T x \\ Ax &\leq b. \end{aligned} \tag{P}$$

Από τον ορισμό της όψης F και του συνόλου δεικτών I, για κάθε $i \notin I$ υπάρχει σημείο $x^{(i)} \in F$ τέτοιο ώστε

$$a_i^T x^{(i)} < b_i.$$

Το $x^{(i)}$ και το y^* είναι ζευγάρι βέλτιστων λύσεων των (P) και (D) αντίστοιχα άρα ικανοποιούν τη συμπληρωματική χαλαρότητα. Επομένως,

$$y_i^* = 0, \text{ για κάθε } i \notin I.$$

Έχουμε ότι $w = \sum_{i\in I} y_i^* a_i$. Αποδείξαμε ότι το $\{a_i \mid i \in I\}$ ορίζει ένα ακέραιο γεννητικό σύνολο των σημείων του συνόλου $\mathrm{cone}(\{a_i \mid i \in I\}) \cap \mathbb{Z}^n$.

Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει η υπόθεση του θεωρήματος για κάθε όψη του P. Θεωρούμε ακέραιο διάνυσμα w για το οποίο το (P) είναι φραγμένο. Έστω F η ελαχιστική όψη του P που περιέχει όλες τις βέλτιστες λύσεις του (P) και $I \subseteq [m]$ τ. ώ. το I δεικτοδοτεί τις γραμμές του πίνακα A που αντιστοιχούν στους περιορισμούς που ικανοποιούνται με ισότητα από όλα τα στοιχεία της F. Δηλαδή

$$F = \{x \in P \mid A_I x = b_I\}. \tag{20.3}$$

Από συμπληρωματική χαλαρότητα το (D) έχει μια βέλτιστη (πιθανώς μη ακέραιη) λύση y όπου το y_i μηδενίζεται για κάθε $i \notin I$. Από την υπόθεση του θεωρήματος, υπάρχουν μη αρνητικοί ακέραιοι λ_i, $i \in I$, έτσι ώστε $w = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i$. Θέτοντας $y_i = \lambda_i$ για $i \in I$, και $y_i = 0$ για $i \notin I$, παίρνουμε ένα ακέραιο διάνυσμα $y \geq 0$ τέτοιο ώστε $y^T A = w^T$. Για κάθε $x \in F$,

$$b^T y = \sum_{i \in I} y_i b_i \overset{(20.3)}{=} \sum_{i \in I} y_i (a_i^T x) = (y^T A)x = w^T x.$$

Επομένως το ακέραιο διάνυσμα y είναι βέλτιστη λύση του (D). Άρα το σύστημα $Ax \leq b$ ικανοποιεί τον Ορισμό 20.2 και είναι ολικά δυϊκό ακέραιο. ■

Παρατηρήστε ότι αποδείξαμε ότι η συνθήκη του Θεωρήματος 20.6 αρκεί να ισχύει μόνο για ελαχιστικές όψεις του P.

Πόρισμα 20.1 *Τα διανύσματα που αντιστοιχούν στις m γραμμές ενός ρητού πίνακα A είναι ακέραιο γεννητικό σύνολο του $\text{cone}(\{a_1, \ldots, a_m\}) \cap \mathbb{Z}^n$ ανν το σύστημα $Ax \leq 0$ είναι ολικά δυϊκά ακέραιο.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θέωρημα 20.6, το $Ax \leq 0$ είναι ολικά δυϊκά ακέραιο αν και μόνο αν για κάθε ελαχιστική όψη $F = \{x \in P \mid A_I x = 0\}$, $I \subseteq [m]$, του κώνου $C = \{x \mid Ax \leq 0\}$ το σύνολο διανυσμάτων $\{a_i \mid i \in I\}$ ορίζει ένα ακέραιο γεννητικό σύνολο των σημείων του συνόλου $\text{cone}(\{a_i \mid i \in I\}) \cap \mathbb{Z}^n$. Από την Παρατήρηση 16.2 κάθε πολυεδρικός κώνος έχει ακριβώς μία ελαχιστική όψη, το lineality space του. Δηλαδή το θεώρημα εφαρμόζεται μόνο για την όψη $F = \{x \mid Ax = 0\}$. ■

*20.4 Κανόνας του Cramer

Η ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα $A = [a_{ij}]_{i,j \in [n]}$ μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά μέσω των λεγόμενων ελασσόνων οριζουσών. Για 1×1 πίνακα $A = [a_{11}]$, ορίζουμε $\det A = a_{11}$. Συμβολίζουμε με A_{ij} τον $(n-1) \times (n-1)$ πίνακα που προκύπτει από τον A διαγράφοντας την iστή γραμμή και τη jστή στήλη. Χρησιμοποιώντας ανάπτυγμα ως προς τη γραμμή i παίρνουμε ότι

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

ενώ αν αναπτύξουμε ως προς την στήλη j

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Για έναν $n \times n$ πίνακα A και τυχόν $b \in \mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε με $A_i(b)$ τον πίνακα που προκύπτει από τον A αν αντικαταστήσουμε την iστή στήλη a_i με το διάνυσμα b. Δηλαδή

$$A_i(b) = [a_1 \quad \cdots \quad a_{i-1} \quad b \quad a_{i+1} \quad \cdots \quad a_n].$$

Θεώρημα 20.7 (Κανόνας του Cramer) *Έστω A ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας. Για κάθε $b \in \mathbb{R}^n$, η μοναδική λύση x του συστήματος $Ax = b$ ορίζεται ως*

$$x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det A},\ i = 1, \ldots, n.$$

Απόδειξη. Ο $n \times n$ μοναδιαίος πίνακας I έχει στήλες τα n μοναδιαία διανύσματα $e_1, \ldots, e_n$. Αν $Ax = b$, ο ορισμός του πολλαπλασιασμού πινάκων δίνει ότι

$$\begin{aligned} A \cdot I_i(x) &= A \cdot [e_1 \ \cdots \ x \ \cdots \ e_n] = [Ae_1 \ \cdots \ Ax \ \cdots \ Ae_n] \\ &= [a_1 \ \cdots \ b \ \cdots \ a_n] = A_i(b). \end{aligned}$$

Επομένως $\det A \det I_i(x) = \det A_i(b)$ όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα ότι για $n \times n$ πίνακες B, C, ισχύει ότι $\det(B \cdot C) = \det B \det C$. Αν συμβολίσουμε με I' τον $(n-1) \times (n-1)$ μοναδιαίο πίνακα, υπολογίζοντας το $\det I_i(x)$ ως προς τη γραμμή i παίρνουμε ότι $\det I_i(x) = (-1)^{2i} x_i \det I' = x_i$. ∎

Ο Κανόνας του Cramer μας δίνει έναν απλό τρόπο να υπολογίζουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα. Θυμίζουμε ότι e_j είναι η jστή στήλη του $n \times n$ μοναδιαίου πίνακα I.

Θεώρημα 20.8 *Έστω A ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας. Για κάθε $i, j \in [n]$, το (i, j) στοιχείο του A^{-1} ισούται με*

$$\frac{1}{\det A}(-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Απόδειξη. Η jστή στήλη του A^{-1} είναι ένα διάνυσμα x που ικανοποιεί τη σχέση

$$Ax = e_j$$

και το iστό στοιχείο του x είναι το (i, j) στοιχείο του A^{-1}. Από το Θεώρημα 20.7,

$$x_i = \frac{\det A_i(e_j)}{\det A},\ i = 1, \ldots, n.$$

Υπολογίζοντας το $\det A_i(e_j)$ με ανάπτυξη ως προς τη στήλη i παίρνουμε ότι η ορίζουσα ισούται με $(-1)^{i+j} \det A_{ji}$. ∎

Αναφορές

[1] Guoli Ding, Li Feng, and Wenan Zang. The complexity of recognizing linear systems with certain integrality properties. *Math. Program.*, 114(2):321–334, 2008.

[2] J. Edmonds and R. Giles. A min-max relation for submodular functions on graphs. In P. L. Hammer, E. L. Johnson, B. H. Korte, and G. L. Nemhauser, editors, *Studies in Integer Programming*, volume 1 of *Annals of Discrete Mathematics*, pages 185–204. North-Holland, 1977.

[3] F. R. Giles and W. R. Pulleyblank. Total dual integrality and integer polyhedra. *Linear Algebra and its Applications*, 25:191–196, 1979.

[4] A. Schrijver. *Theory of linear and integer programming.* John Wiley and Sons, 1986.