Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 21: 13.01.2015 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Σάμαρης Μιχάλης & Τζόβας Χαρίλαος & Σ. Κ.

21.1 TDI και ακέραια πολύεδρα

Θα δείξουμε ότι για κάθε ρητό πολύεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Mx \leq d\}$ υπάρχει TDI σύστημα που το αναπαριστά. Αν το αρχικό σύστημα $Mx \leq d$ δεν είναι TDI, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $w \in \mathbb{Z}^n$ για το οποίο το γραμμικό πρόγραμμα

$$\min\{y^T d \mid y^T M = w^T, y \geq 0\}$$

είναι εφικτό και φραγμένο, αλλά δεν έχει ακέραιη λύση. Το w ανήκει μεν στον κώνο που παράγουν οι γραμμές του πίνακα M αλλά δεν μπορεί να παραχθεί με ακέραιο κωνικό συνδυασμό τους. Η ιδέα είναι να εμπλουτίσουμε την περιγραφή του P με επιπλέον έγκυρες ανισότητες ώστε κάθε τέτοιο w να μπορεί να παραχθεί ως ακέραιος κωνικός συνδυασμός των γραμμών ενός εμπλουτισμένου πίνακα A. Η απόδειξη του θεωρήματος που ακολουθεί δείχνει ότι κάτι τέτοιο είναι πάντα εφικτό αν το P είναι ρητό πολύεδρο.

Θεώρημα 21.1 (Giles, Pulleybank 1979) *Έστω P ρητό πολύεδρο. Τότε υπάρχει TDI σύστημα $Ax \leq b$ με A ακέραιο πίνακα, τέτοιο ώστε $P = \{x \mid Ax \leq b\}$. Επιπλέον αν το P είναι ακέραιο πολύεδρο τότε το b μπορεί να επιλεχθεί να είναι ακέραιο.*

Απόδειξη. Έστω $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Mx \leq d\}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο M είναι ακέραιος πίνακας. Παρατηρούμε οτι το σύνολο

$$L = \{l \in \mathbb{Z}^n \mid l^T = y^T M,\ \mathbf{0} \leq y \leq \mathbf{1}\}$$

είναι πεπερασμένο. Η συνάρτηση $t(l) = \max\{l^T x \mid x \in P\}$, όπου $l \in L$, είναι καλά ορισμένη αφού το δυϊκό του γραμμικού προγράμματος είναι εφικτό (βλ. Θεώρημα 8.4). Ορίζουμε το σύστημα $Ax \leq b$ ως

$$l^T x \leq t(l),\ l \in L.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι αν το l είναι η iστή γραμμή του πίνακα M, $t(l) = d_i$ για κάθε i. Παρατηρούμε ότι

$$\{x \mid Ax \leq b\} = P.$$

Αν P ακέραιο πολύεδρο, $\forall l \in L$, $t(l) \in \mathbb{Z}$, οπότε το b είναι ακέραιο διάνυσμα. Αρκεί να δείξουμε πλέον ότι το σύστημα $Ax \leq b$ είναι TDI.

Έστω $w \in \mathbb{Z}^n$ τ. ώ. ορίζεται το $\max\{w^T x \mid x \in P\}$. Θα κατασκευάσουμε ακέραιη βέλτιστη λύση για το γραμμικό πρόγραμμα

$$\min\{y^T b \mid y^T A = w^T,\ y \geq 0\}. \tag{21.1}$$

Ορίζουμε

$$z^* = \max\{w^T x \mid x \in P\} = \min\{y^T d \mid y^T M = w^T,\ y \geq 0\} \tag{21.2}$$

Αν $y = [y_1, \ldots, y_t]^T$ με $\lfloor y \rfloor$ συμβολίζουμε το διάνυσμα $[\lfloor y_1 \rfloor, \ldots, \lfloor y_t \rfloor]^T$. Έστω y^* ο minimizer της (21.2). Θεωρούμε $\overline{w}^T := (y^{*T} - \lfloor y^* \rfloor^T)M$.

Παρατήρηση 21.1 $\overline{w} \in L$.

Ισχυρισμός 21.1 $y^* - \lfloor y^* \rfloor$ *είναι βέλτιστη λύση για το γραμμικό πρόγραμμα* $\min\{y^T d \mid y^T M = \overline{w}^T,\ y \geq 0\}$.

Απόδειξη ισχυρισμού. Έστω ότι υπάρχει $y' \geq 0$, τέτοιο ώστε $(y')^T M = \overline{w}^T$ και $(y')^T d < (y^* - \lfloor y^* \rfloor)^T d$. Τότε το διάνυσμα $\lfloor y^* \rfloor + y' \neq y^*$ είναι εφικτή λύση για το γραμμικό πρόγραμμα ελαχιστοποίησης της (21.2), με κόστος μικρότερο από $d^T y^*$, άτοπο. ∎

Άρα $(y^* - \lfloor y^* \rfloor)^T d \overset{(21.2)}{=} \max\{\overline{w}^T x \mid x \in P\} = t(\overline{w})$. Παίρνουμε ότι

$$z^* = t(\overline{w}) + \lfloor y^* \rfloor^T d \tag{21.3}$$

όπου $z^* = (y^*)^T d$. Κατασκευάζουμε λύση y^0 για το σύστημα $y^T A = w^T$, $y \geq 0$, θέτοντας τις μεταβλητές που αντιστοιχούν στις γραμμές του M σύμφωνα με τις αντίστοιχες τιμές στο διάνυσμα $\lfloor y^* \rfloor$ και τη μεταβλητή που αντιστοιχεί στον περιορισμό $\overline{w}^T x \leq t(\overline{w})$ σε μονάδα. Όλες οι υπόλοιπες συντεταγμένες του y^0 είναι μηδέν. Έχουμε ότι

$$(y^0)^T A = \lfloor y^* \rfloor^T M + 1 \cdot \overline{w}^T = \lfloor y^* \rfloor^T M + ((y^*)^T - \lfloor y^* \rfloor^T)M = (y^*)^T M = w^T.$$

Επομένως η y^0 είναι εφικτή λύση. Όσον αφορά το κόστος

$$(y^0)^T b = \lfloor y^* \rfloor^T d + 1 \cdot t(\overline{w}) \overset{(21.3)}{=} z^*.$$

Άρα η y^0 είναι βέλτιστη για το γραμμικό πρόγραμμα (21.1). ∎

Πόρισμα 21.1 *Ένα ρητό πολύεδρο P είναι ακέραιο αν και μόνο αν υπάρχει TDI σύστημα $Ax \leq b$ με $P = \{x \mid Ax \leq b\}$ και b ακέραιο διάνυσμα.*

21.2 Το r-arborescence πολύτοπο

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $D = (V, A)$ καλείται *ασθενώς συνεκτικό* αν το υποκείμενο μη κατευθυνόμενο γράφημα είναι συνεκτικό. Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $D = (V, A)$ ονομάζεται *κατευθυνόμενο δέντρο* αν το υποκείμενο μη κατευθυνόμενο γράφημα είναι δέντρο, δηλ. το D είναι ασθενώς συνεκτικό και δεν περιέχει μη κατευθυνόμενους κύκλους. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι ένα κατευθυνόμενο δέντρο περιέχει τουλάχιστον μία κορυφή v με εισερχόμενο βαθμό $d^{\text{in}}(v) = 0$. Αν ακριβώς μία κορυφή r έχει εισερχόμενο βαθμό 0, την ονομάζουμε *ρίζα* και το κατευθυνόμενο δέντρο είναι *ριζωμένο* στο r. *Arborescence (δενδροδομή)* σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα $D = (V, A)$ είναι ένα σύνολο ακμών $B \subseteq A$ έτσι ώστε το $T = (V, B)$ είναι ριζωμένο κατευθυνόμενο δέντρο. Αν η ρίζα είναι το r τότε το T καλείται r-arborescence. Παρατηρήστε ότι σε μία δενδροδομή, κάθε $v \neq r$ έχει εισερχόμενο βαθμό 1.

Min-length r-arborescence Προβλημα
Εισοδος: $D = (V, A)$ κατευθυνόμενο γράφημα, $r \in V$, συνάρτηση μήκους $l\colon A \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$.
Εξοδος: r-arborescence $T = (V, B)$ που να ελαχιστοποιεί την συνάρτηση $\sum_{a \in B} l(a)$.

Ορίζουμε ως *r-cut* C ένα $C \subseteq A$ τ. ώ. για κάποιο $U \subseteq V - \{r\}$ με $U \neq \emptyset$, $C = \delta^{\text{in}}(U)$ δηλαδή το C είναι οι ακμές της τομής $(V \setminus U, U)$. Θεωρούμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} & x(C) \geq 1 && \forall\ r\text{-cut } C \\ & x(\delta^{\text{in}}(v)) = 1 && \forall v \in V \setminus \{r\} \\ & x(\delta^{\text{in}}(r)) = 0 && \\ & x_a \geq 0 && \forall a \in A \end{aligned} \tag{21.4}$$

Ως *up-hull (ανωκάλυμμα)* ενός πολυέδρου P ορίζεται το $P^{\uparrow} = P + \mathbb{R}^n{}_{\geq 0}$. Αν Q είναι το πολύεδρο που ορίζεται από το σύστημα (21.4) το παρακάτω σύστημα περιγράφει το $Q^{\uparrow}$:

$$\begin{aligned} & x(C) \geq 1 && \forall\ r\text{-cut } C \\ & x_a \geq 0 && \forall a \in A \end{aligned} \tag{21.5}$$

Το δυϊκό του γραμμικού προγράμματος $\min\{\sum_{a \in A} l(e) x_a \mid x \in Q^{\uparrow}\}$ είναι το παρακάτω:

$$\begin{aligned} \max \sum_{C} y_C & \\ \sum_{C \ni a} y_C \leq l(a) && \forall a \in A \\ y_C \geq 0 && \forall\ r\text{-cut } C \end{aligned} \tag{21.6}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι το σύστημα (21.5) είναι TDI.

Θεώρημα 21.2 *Για κάθε συνάρτηση* $l \colon A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\min\{\sum_{a \in A} l(e) x_a \mid x \in Q^{\uparrow}\} = \max\{\sum_C y_C \mid \sum_{C \ni a} y_C \leq l(a), \forall a \in A,\ \ y_C \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \forall\ r\text{-cut } C\}$.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με M_1 και M_2 τα min, max αντίστοιχα που αναφέρει το θεώρημα. Λόγω ασθενούς δυικότητας $M_2 \leq M_1$. Θα δείξουμε ότι και $M_1 \leq M_2$ με επαγωγή στο $\sum_{a \in A} l(a)$. Θεωρούμε $A_0 = \{a \in A \mid l(a) = 0\}$. Αν περιέχεται r-arborescence στο A_0 τότε $M_1 = 0 \leq M_2$. Αν όχι, τότε υπάρχει $K \subseteq V$, τ. ώ. το K ορίζει ισχυρά συνεκτική συνιστώσα του $D_0 = (V, A_0)$, όπου $r \notin K$ και $l(a) > 0, \forall a \in \delta^{\text{in}}(K)$. Το σύνολο K υπάρχει γιατί μπορούμε να συνθλίψουμε όλες τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες και στο προκύπτον ακυκλικό κατευθυνόμενο γράφημα πρέπει να υπάρχει κορυφή (που μπορεί να προέρχεται από σύνθλιψη μιας ισχ. συν. συνιστώσας) με μηδενικό εισερχόμενο βαθμό (ειδάλλως οπισθοχωρώντας από μία κορυφή θα μπορούσαμε να φτάσουμε είτε στο r είτε να ανακαλύψουμε καινούργιο κατευθυνόμενο κύκλο).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $l' = l - \chi^{\delta^{\text{in}}(K)}$.

Παρατήρηση 21.2 $l'(a) = l(a) - 1, \forall a \in \delta^{in}(K)$, *ειδάλλως* $l'(a) = l(a)$.

Παρατήρηση 21.3 $\sum_{a \in A} l'(a) < \sum_{a \in A} l(a)$.

Λόγω της Παρατήρησης 21.3 μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση για την l'. Θα υπάρχει r-arborescence B και ακέραιη δυϊκή λύση y' τέτοια ώστε:

$$\sum_{a\in A} l'(a)\chi^B(a) \leq \sum_C y'_C.$$

Έστω $\sum_C y'_C = t$. Επαγωγικά υποθέτουμε ότι $l'(B) = t$. Ισχύει ότι $\sum_{a\in C} y'_C \leq l'(a)$, $\forall a \in A$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι από τις ακμές του B στο K εισέρχεται μόνο μία ακμή, δηλαδή

$$|B \cap \delta^{\text{in}}(K)| = 1.$$

Πράγματι, αν $|B \cap \delta^{\text{in}}(K)| \geq 2$, τότε $\forall \beta \in B \cap \delta^{\text{in}}(K)$ το $(B - \{\beta\}) \cup A_0$ περιέχει r-arborescence B' με βάρος $l'(B') \leq l'(B) - l'(\beta) \leq l'(B)$. Αν $\alpha = (u_\alpha, u'_\alpha)$, $\beta = (w_\beta, w'_\beta)$ και $\alpha, \beta \in B \cap \delta^{\text{in}}(K)$, κάθε κορυφή v του K που είναι προσβάσιμη από τη ρίζα μέσω της κορυφής w'_β είναι και προσβάσιμη μέσω ενός κατευθυνόμενου μονοπατιού $r \rightsquigarrow u'_\alpha$ προσαυξημένου από ένα μονοπάτι μηδενικού μήκους $u'_\alpha \rightsquigarrow v$.

Επομένως $\{a\} = B \cap \delta^{\text{in}}(K)$ $l(B) = l'(B) + l(a) - l'(a) = l'(B) + 1 = t + 1$. Ορίζουμε εφικτή δυϊκή λύση y με $\sum_C y_C = t + 1$:

$$y_C = \begin{cases} y'_C + 1, & \text{αν } C = \delta^{\text{in}}(K) \\ y'_C, & \text{αν } C \neq \delta^{\text{in}}(K) \end{cases}$$

Ολοκληρώθηκε η απόδειξη του επαγωγικού βήματος. ∎

Πόρισμα 21.2 *Το σύστημα* (21.5) *είναι TDI.*

Απόδειξη. Αν για κάποια ακμή $a \in A$, $l(a) \in \mathbb{Z}_{<0}$, το (21.6) είναι ανέφικτο. Άρα από το Θεώρημα 21.2 παίρνουμε το ζητούμενο. ∎

Μπορεί να αποδειχθεί το εξής.

Πρόταση 21.1 *Έστω $Ax \leq b, ax \leq \beta$ ένα TDI σύστημα. Τότε το σύστημα $Ax \leq b, ax = \beta$ είναι επίσης TDI.*

Από την Πρόταση 21.1 και το προηγούμενο πόρισμα παίρνουμε ότι

Πόρισμα 21.3 *Το σύστημα* (21.4) *είναι TDI.*

Το r-arborescence πολύτοπο ορίζεται ως

$$\text{conv}\{\chi^B \in \{0,1\}^{|A|} \mid \text{ το } B \text{ είναι } r\text{-arborescence }\}.$$

Πόρισμα 21.4 *Το σύστημα* (21.4) *ορίζει το r-arborescence πολύτοπο.*

Πόρισμα 21.5 *Το σύστημα* (21.5) *ορίζει το up-hull του r-arborescence πολυτόπου.*