Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 22: 12.01.2021 & 13.01.2021 — Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Σ. Κ.

22.1 Βασικοί υπολογισμοί πάνω σε πολύεδρα

Στην παρούσα διάλεξη θα μελετήσουμε αλγορίθμους για την επίλυση κάποιων βασικών υπολογιστικών προβλημάτων όπου η είσοδος είναι η περιγραφή ενός πολυέδρου. Τα προβλήματα αυτά αφορούν έννοιες που έχουμε ήδη μελετήσει, όπως για παράδειγμα τον υπολογισμό της διάστασης ενός πολυέδρου.

Για να διαφοροποιήσουμε την αναπαράσταση σε bits ενός πολυέδρου P από το μαθηματικό αντικείμενο πολύεδρο, θα χρησιμοποιούμε για την πρώτη το σύμβολο $\langle P \rangle$. Η προφανής αναπαράσταση είναι μέσω ενός πίνακα $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ και ενός διανύσματος $b \in \mathbb{Q}^m$, έτσι ώστε $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Σε αυτή την περίπτωση $\mathrm{size}(\langle P \rangle) = \Theta(\mathrm{size}(A) + \mathrm{size}(b))$ όπου ο τελεστής size που δίνει το μήκος της δυαδικής κωδικοποίησης ορίστηκε στη Διάλεξη 19. Αυτή είναι η λεγόμενη H-περιγραφή του πολυέδρου που το αναπαριστά ως τομή ημιχώρων.

Υπάρχουν όμως αλγόριθμοι, όπως π.χ. ο ελλειψοειδής, που είναι σε θέση να λύνουν γραμμικά προγράμματα εάν το πολύεδρο δίνεται έμμεσα μέσω ενός μαντείου διαχωρισμού. *Μαντείο διαχωρισμού (separation oracle)* καλείται ένας αλγόριθμος ο οποίος με είσοδο ένα σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ μπορεί να διακρίνει αν $x \in P$ ή $x \notin P$ και στη δεύτερη περίπτωση να βρει ένα υπερεπίπεδο που διαχωρίζει το x από το P. Σε αυτή την περίπτωση δεν χρειάζεται στην είσοδο η πλήρης H-περιγραφή του P αλλά αρκεί το n και ένα άνω φράγμα στην ποσότητα

$$\max\{\max_{i,j}\{\mathrm{size}\, A_{ij}\},\ \max_i b_i\}.$$

Δεν χρειάζεται ο αλγόριθμος να γνωρίζει a priori τον πίνακα A και το διάνυσμα b. Λέμε ότι η *πολυπλοκότητα έδρας (facet complexity)* του P είναι το πολύ φ αν υπάρχει σύστημα ανισώσεων με ρητούς συντελεστές του οποίου το σύνολο λύσεων είναι το P τέτοιο ώστε το μήκος της κωδικοποίησης της κάθε ανίσωσης είναι το πολύ φ. Αν $P = \mathbb{R}^n$, απαιτούμε $\varphi \geq n+1$. Η *πολυπλοκότητα κορυφής (vertex complexity)* του P είναι το πολύ ν αν υπάρχουν πεπερασμένα σύνολα V και E ρητών διανυσμάτων τέτοια ώστε $P = \mathrm{conv}(V) + \mathrm{cone}(E)$ και κάθε ένα από τα διανύσματα στα V και E έχει μήκος κωδικοποίησης το πολύ ν. Αν $P = \varnothing$ απαιτούμε $\nu \geq n$.

Είναι γνωστό ότι $\nu \leq 4n^2\varphi$ και $\varphi \leq 4n^2\nu$ [3, Θεώρημα 10.2].

Εάν διαθέτουμε μαντείο διαχωρισμού που τρέχει σε χρόνο $O(\mathrm{poly}(n+\varphi))$, τότε το γραμμικό πρόγραμμα μπορεί επίσης να επιλυθεί σε χρόνο $O(\mathrm{poly}(n+\varphi))$. Η σχετική θεωρία αναπτύσσεται εξαντλητικά στο [1].

Δεδομένων των παραπάνω, θα αναφερόμαστε στην είσοδο των αλγορίθμων ως $\langle P \rangle$ χωρίς άλλες λεπτομέρειες. Το μέγεθος της εισόδου θα είναι $n + \varphi$. Από την περιγραφή του αλγορίθμου θα είναι σαφές εάν ο αλγόριθμος χρειάζεται πρόσβαση στην πλήρη H-περιγραφή του P ή αν αρκεί ένα μαντείο διαχωρισμού. Όσον αφορά τον χρόνο εκτέλεσης θα είναι εν γένει πολυωνυμικός στο μέγεθος της εισόδου και η βασική υπορουτίνα θα είναι συνήθως η επίλυση ενός γραμμικού προγράμματος ή ισοδύναμα η εύρεση ενός σημείου που να ανήκει σε ένα δεδομένο πολύεδρο Q. Είναι γνωστό ότι το τελευταίο πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί σε χρόνο $\mathrm{poly}(\mathrm{size}(\langle Q\rangle))$.

Στην περίπτωση που το πολύεδρο εισόδου δίνεται σε V-περιγραφή, όπως στο Πρόβλημα 22.4.1, θα το αναφέρουμε ρητά. Δεν είναι γνωστή εν γένει αποδοτική μέθοδος για μετατροπή μιας δεδομένης V-περιγραφής σε ισοδύναμη H-περιγραφή.

22.2 Εύρεση κορυφής

Πρόβλημα 22.2.1 Κορυφη πολυτοπου
Είσοδος: Περιγραφή πολυτόπου $\langle P\rangle$ στο $\mathbb{R}^n$.
Έξοδος: Κορυφή του P.

Βρες διαδοχικά

$$\begin{aligned} c_1 &= \max\{x_1 \mid x \in P\} \\ c_2 &= \max\{x_2 \mid x \in P,\ x_1 = c_1\} \\ &\ \vdots \\ c_n &= \max\{x_n \mid x \in P,\ x_1 = c_1,\ \ldots,\ x_{n-1} = c_{n-1}\} \end{aligned}$$

Τότε $(c_1, \ldots, c_n)^T$ είναι κορυφή του P. Πράγματι, έστω c δεν είναι κορυφή. Τότε υπάρχουν y και z στο P τ. ώ. $c = \lambda y + (1-\lambda)z$ και $\lambda \in (0, 1)$. Έστω $j \in [n]$ ο ελάχιστος δείκτης για τον οποίο $y_j \neq z_j$. Ο j είναι καλά ορισμένος, ειδάλλως $c = y = z$. Τότε

$$\max\{y_j, z_j\} > c_j = \max\{x_j \mid x \in P,\ x_1 = c_1,\ \ldots,\ x_{j-1} = c_{j-1}\}.$$

Καταλήξαμε σε άτοπο. Ο αλγόριθμος που δώσαμε λύνει n διαδοχικά γραμμικά προγράμματα, άρα τρέχει σε πολυωνυμικό χρόνο. ♣

Πρόβλημα 22.2.2 Βελτιστη κορυφη πολυτοπου
Είσοδος: Περιγραφή πολυτόπου $\langle P\rangle$ στο $\mathbb{R}^n$, διάνυσμα $c \in \mathbb{Q}^n$.
Έξοδος: Κορυφή v του P τ. ώ. $v = \arg\max\{c^T x \mid x \in P\}$.

Αν θέλουμε να βρούμε μια κορυφή που είναι βέλτιστη λύση του προβλήματος $\max\{c^T x \mid x \in P\}$ μπορούμε να βρούμε πρώτα τη μέγιστη τιμή γ και μετά να βρούμε μια κορυφή του πολυτόπου $P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = \gamma\}$. Εναλλακτικά, για κατάλληλα μικρό ε το πρόβλημα

$$\max\{\bar{c}^T x \mid x \in P\}$$

όπου $\bar{c} = c + (\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n)^T$ έχει μοναδική βέλτιστη λύση σε κορυφή x_0 του P η οποία επίσης μεγιστοποιεί τη συνάρτηση $c^T x$ επί του P. Για λόγους πληρότητας δίνουμε τη σχετική απόδειξη στην Ενότητα 22.6. ♣

22.3 Εύρεση αφινικού καλύμματος και διάστασης

Πρόβλημα 22.3.1 ΑΦΙΝΙΚΟ ΚΑΛΥΜΜΑ ΠΟΛΥΤΟΠΟΥ
Είσοδος: Περιγραφή πολυτόπου $\langle P \rangle$ στο $\mathbb{R}^n$.
Έξοδος: Αφινικά ανεξάρτητες κορυφές $v_0, v_1, \ldots, v_k$ του P και γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις $c_1^T x = \gamma_1, \ldots, c_{n-k}^T x = \gamma_{n-k}$ οι οποίες είναι έγκυρες για το P.

Προφανώς για την έξοδο του αλγορίθμου θα ισχύει ότι

$$\mathrm{aff}(P) = \mathrm{aff}(\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_i^T x = \gamma_i, i \in [n-k]\}.$$

Επομένως $\dim(P) = k$.

Ο αλγόριθμος ξεκινάει βρίσκοντας μία κορυφή v_0 του P, τρέχοντας δηλαδή μια υπορουτίνα για το Πρόβλημα 22.2.1.

Επαγωγικά, έστω ότι έχουμε βρει αφινικά ανεξάρτητες κορυφές $v_0, \ldots, v_i$ $(i \geq 0)$ του P και γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις $c_1^T x = \gamma_1, \ldots, c_j^T x = \gamma_j$ $(j \geq 0)$ οι οποίες είναι έγκυρες για το P. Αμέσως μετά την εύρεση της v_0 ισχύει $i = j = 0$.

Αν $i + j = n$ ο αλγόριθμος τερματίζει.

Αν $i + j < n$ προχωράμε ως εξής.

Ισχύει ότι

$$\mathrm{aff}(\{v_0, v_1, \ldots, v_i\}) = v_0 + L$$

όπου L μονοσήμαντα ορισμένος γραμμικός υπόχωρος με $\dim(L) = i$. Θεωρούμε $c \perp L$. Ισχύει ότι για κάθε $x \in \mathrm{aff}(\{v_0, v_1, \ldots, v_i\})$ $c^T x = c^T v_0$. Επειδή $\dim(L^\perp) = n - i > j$ μπορούμε να διαλέξουμε το c τέτοιο ώστε να είναι γραμμικά ανεξάρτητο από τα $c_1, \ldots, c_j$. Υπάρχει πάντα ένα τέτοιο c σε μία βάση του $L^\perp$. Αλγεβρικά, το σύνολο $L^\perp$ είναι το null-space ενός πίνακα A του οποίου οι γραμμές είναι τα διανύσματα $v_1 - v_0, \ldots, v_i - v_0$, δηλ.

$$L^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}.$$

Μια βάση για τον υπόχωρο $L^\perp$ μπορεί να υπολογιστεί μέσω απαλοιφής Gauss, βλ. π.χ. [2, Κεφ. 7].

Βρίσκουμε κορυφή v' που είναι λύση του γραμμικού προγράμματος $\max\{c^T x \mid x \in P\}$ και κορυφή v'' που είναι λύση του γραμμικού προγράμματος $\min\{c^T x \mid x \in P\}$. Αν $c^T v' = c^T v''$, θέτουμε $c_{j+1} := c$ και $\gamma_{j+1} := c^T v'$. Αν $c^T v' > c^T v''$, τουλάχιστον ένα από τα v', v'' δεν ανήκει στο $\mathrm{aff}(\{v_0, v_1, \ldots, v_i\})$ και μπορούμε να το διαλέξουμε ως v_{i+1}. ♣

Ο αλγόριθμος μας έδωσε και μια κατασκευαστική απόδειξη για την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 22.1 *Αν $P \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι πολύτοπο και $\dim(P) = k$ το πολύτοπο περιέχει $k+1$ αφινικά ανεξάρτητες κορυφές.*

Μη κατασκευαστικά η Πρόταση 22.1 αποδεικνύεται ως εξής. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Αφού $S \subseteq \mathrm{conv}(S)$, $\dim(S) \leq \dim(\mathrm{conv}(S))$. Επίσης κάθε $x \in \mathrm{conv}(S)$ είναι κυρτός συνδυασμός σημείων του S άρα $\mathrm{conv}(S) \subseteq \mathrm{aff}(S)$. Άρα $\dim(\mathrm{conv}(S)) \leq \dim(S)$. Αποδείξαμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 22.2 *Για οποιοδήποτε σύνολο* $S \subseteq \mathbb{R}^n$ *ισχύει ότι* $\dim(\text{conv}(S)) = \dim(S)$.

Έστω P πολύτοπο στο $\mathbb{R}^n$. Από το Πόρισμα 10.3 $P = \text{conv}(S)$ όπου S το σύνολο των κορυφών του P. Από την Πρόταση 22.2 $\dim(P) = \dim(S)$. Επομένως το πολύτοπο P περιέχει ακριβώς $\dim(P) + 1$ αφινικά ανεξάρτητες κορυφές.

22.4 Επέκταση σε πολύεδρα

Οι παραπάνω αλγόριθμοι μπορούν να επεκταθούν και στην περίπτωση που η είσοδος δεν είναι απαραίτητα πολύτοπο.

22.4.1 Αφινικό κάλυμμα και διάσταση πολυέδρου

Μελετάμε πρώτα τον υπολογισμό της διάστασης πολυέδρου που δίνεται σε V-περιγραφή. Θα δώσουμε 3 ισοδύναμους χαρακτηρισμούς.

Πρόβλημα 22.4.1 Διασταση πολυεδρου σε V-περιγραφη
Είσοδος: V πίνακας $n \times (m+1)$ και R πίνακας $n \times t$.
Έξοδος: Διάσταση του πολυέδρου P που ορίζεται ως

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = V\lambda + R\mu,\ \mathbf{1}^T\lambda = 1,\ \lambda \geq \mathbf{0},\ \mu \geq \mathbf{0}\}.$$

Ορίζουμε τον πίνακα

$$A_P = \begin{bmatrix} V & R \\ \mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix}. \tag{22.1}$$

Αν $v_0, v_1, \ldots, v_m$ και $y_1, \ldots, y_t$ είναι οι στήλες των V και R αντίστοιχα, έχουμε ότι $P = \text{conv}(v_0, v_1, \ldots, v_m) + \text{cone}(y_1, \ldots, y_t)$.

Θα μας διευκολύνει να μετατοπίσουμε το πολύεδρο ώστε να έχει σαν κορυφή την αρχή των αξόνων $\vec{0}$. Ορίζουμε P' έτσι ώστε $P' + \{v_0\} = P$. Πιο απλά γράφουμε $P' = P - v_0$. Προφανώς $\dim(P) = \dim(P')$. Ο $n \times (m+1)$ πίνακας V' έχει σαν στήλες τα ακραία σημεία του P'. Ορίζουμε τον πίνακα $A'_P := A_{P'}$. Δηλαδή:

$$A'_P = \begin{bmatrix} V' & R \\ \mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix}.$$

Αν $P' = \text{conv}(0, x_1, \ldots, x_m) + \text{cone}(y_1, \ldots, y_t)$ τότε

$$A'_P = \begin{bmatrix} | & | & | & & | & | & & | \\ 0 & x_1 & x_2 & \ldots & x_m & y_1 & \ldots & y_t \\ | & | & | & & | & | & & | \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Με τη μετατόπιση του πολυέδρου πετύχαμε τα σημεία $y_1, \ldots, y_t$ να ανήκουν στο P'.

Ισχυρισμός 22.1 *Το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανυσμάτων στο σύνολο* $S = \{\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \mid x \in P'\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *ισούται μϵ* k *όπου* $k = \mathrm{rank}(A'_P)$.

Απόδειξη ισχυρισμού. Αν προσθέσουμε την πρώτη στήλη του A'_P σε κάθε μία από τις t τελευταίες στήλες του προκύπτει ο πίνακας

$$B_P = \begin{bmatrix} V' & R \\ \mathbf{1}^T & \mathbf{1}^T \end{bmatrix}.$$

Ισχύει $\mathrm{rank}(B_P) = \mathrm{rank}(A'_P) = k$. Όλες οι στήλες του πίνακα B_P αντιστοιχούν σε στοιχεία του S (γιατί;). Άρα το S περιέχει τουλάχιστον k γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Από την άλλη το S είναι υποσύνολο του κώνου που παράγεται από τις στήλες του A'_P και ο κώνος αυτός έχει διάσταση k. Επομένως το S δεν μπορεί να περιέχει παραπάνω από k γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. ∎

Για $\rho_1, \ldots, \rho_t \in \mathbb{R}$,

$$\rho_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix} + \ldots + \rho_t \begin{bmatrix} x_t \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

αν και μόνο αν

$$\rho_1 x_1 + \ldots + \rho_t x_t = 0 \text{ και } \sum_{i=1}^{t} \rho_i = 0.$$

Επομένως το μέγιστο πλήθος αφινικά ανεξάρτητων διανυσμάτων στο P' είναι ίσο με το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων στο S. Άρα το μέγιστο πλήθος αφινικά ανεξάρτητων διανυσμάτων στο P' είναι ίσο με k και τελικά

$$\dim(P') = k - 1 = \mathrm{rank}(A'_P) - 1 = \mathrm{rank}(B_P) - 1. \tag{22.2}$$

Για ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων X συμβολίζουμε με $\mathrm{rank}(X)$ το rank του πίνακα που έχει σαν στήλες τα στοιχεία του X. Έστω $d = \mathrm{rank}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_t)$. Τότε υπάρχουν $d + 1$ αφινικά ανεξάρτητα σημεία στο σύνολο $\{0, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_t\}$. Επομένως $\dim(P') \geq d$.

Το μέγιστο πλήθος αφινικά ανεξάρτητων διανυσμάτων στο σύνολο $\{0, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_t\}$ είναι ίσο με $\mathrm{rank}(B_P)$. Επομένως $d + 1 \leq \mathrm{rank}(B_P) \stackrel{(22.2)}{=} \dim(P') + 1$. Προκύπτει ότι $d = \dim(P')$, άρα

$$\dim(P') = \mathrm{rank}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_t). \tag{22.3}$$

Αν αφαιρέσουμε την πρώτη στήλη του πίνακα A_P από τις στήλες $2, \ldots, t+1$ προκύπτει ο πίνακας

$$\Gamma_P = \begin{bmatrix} | & | & | & & | & | & & | \\ v_0 & x_1 & x_2 & \ldots & x_m & y_1 & \ldots & y_t \\ | & | & | & & | & | & & | \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Έχουμε ότι $\mathrm{rank}(A_P) = \mathrm{rank}(\Gamma_P) = d + 1$. Συνοψίζοντας

$$\dim(P) = \mathrm{rank}(A_P) - 1. \tag{22.4}$$

Οι εξισώσεις (22.2),(22.3),(22.4) δίνουν τρεις ισοδύναμους χαρακτηρισμούς της διάστασης του P.

♣

Στη συνέχεια ασχολούμαστε με τον υπολογισμό της διάστασης όταν δεν είναι διαθέσιμη η V-περιγραφή.

Πρόβλημα 22.4.2 ΑΦΙΝΙΚΟ ΚΑΛΥΜΜΑ ΠΟΛΥΕΔΡΟΥ
Είσοδος: Περιγραφή πολυέδρου $\langle P\rangle$ στο $\mathbb{R}^n$.
Έξοδος: Αφινικά ανεξάρτητα σημεία $v_0, v_1, \ldots, v_k$ του P και γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις $c_1^T x = \gamma_1, \ldots, c_{n-k}^T x = \gamma_{n-k}$ έτσι ώστε

$$\mathrm{aff}(P) = \mathrm{aff}(\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_i^T x = \gamma_i, i \in [n-k]\}.$$

Ο αλγόριθμος καλεί μια υπορουτίνα για το Πρόβλημα 22.3.1 με είσοδο το πολύτοπο

$$Q = P \cap \{x \mid -2^{5n^2\phi} \leq x_i \leq 2^{5n^2\phi},\ i \in [n]\}.$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι $\dim(Q) = \dim(P)$ [3, Πορ. 10.2b]. Η ιδέα της απόδειξης είναι απλή. Αν $P = \mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_r\} + \mathrm{cone}\{y_1, \ldots, y_t\}$, η κάθε συντεταγμένη των x_i, y_j είναι το πολύ $2^{4n^2\phi}$ κατ' απόλυτο τιμή. Αν $Q' = \mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_r, x_1 + y_1, \ldots, x_1 + y_t\}$ τότε

$$Q' \subseteq Q \subseteq P.$$

Επίσης $\dim(Q') = \dim(P)$. Ο λόγος είναι ότι ο πίνακας $A_{Q'}$ (βλ. (22.1)) για το πολύεδρο Q' προκύπτει από τον αντίστοιχο πίνακα A_P για το πολύεδρο P αν προσθέσουμε την πρώτη στήλη στις t τελευταίες. Αρα οι δύο πίνακες έχουν το ίδιο rank και με βάση την (22.4) τα Q' και P έχουν την ίδια διάσταση.

Προκύπτει εύκολα ότι $\mathrm{aff}(Q) = \mathrm{aff}(P)$ (γιατί;). ♣

22.4.2 Εύρεση διανύσματος σε ελαχιστική όψη πολυέδρου

Χρειάζομαστε πρώτα κάποια βοηθητικά λήμματα.

Λήμμα 22.1 *Δίνεται μη κενό πολύεδρο $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Το πολύεδρο $P \cap (\mathrm{lin}(P))^\perp$ είναι μυτερό.*

Απόδειξη. Έστω $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Είναι γνωστό ότι $\mathrm{lin}(P) = \{x \mid Ax = 0\}$. Αν το P είναι μυτερό, τελειώσαμε.

Αν το P δεν είναι μυτερό, μέσω απαλοιφής Gauss μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να βρούμε μια βάση $\{u_1, \ldots, u_k\}$, $k \geq 1$, του $\mathrm{lin}(P)$ όπου $k = n - \mathrm{rank}(A)$ και τα $u_1, \ldots, u_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Προφανώς, τα $u_1, \ldots, u_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα από τις γραμμές του A. Επομένως

$$Q := P \cap (\mathrm{lin}(P))^\perp = P \cap \{x \mid u_i^T x = 0,\ i \in [k]\}. \tag{22.5}$$

Το Q είναι της μορφής $\{x \mid Dx \leq d\}$ όπου $\mathrm{rank}(D) = n$. Από το Θεώρημα 5.1, το Q είναι μυτερό.

Ένα παράπλευρο κέρδος ήταν ότι εμπλουτίσαμε τις γνώσεις μας για την αποσύνθεση

$$P = Q + \mathrm{lin}(P)$$

την ύπαρξη της οποίας γνωρίζαμε από το Θεώρημα 10.3. ∎

Θυμίζουμε ότι αν $C \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι πολυεδρικός κώνος, με C^* συμβολίζουμε τον δυϊκό του (βλ. Διάλεξη 10). Ισχύει ότι $C^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in C,\ y^T x \leq 0\}$.

Λήμμα 22.2 *Δεδομένου ενός μη κενού πολυέδρου $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, το γραμμικό πρόγραμμα $\max\{c^T x \mid x \in P\}$ είναι φραγμένο αν και μόνο αν $c \in (\mathrm{rec}(P))^*$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 8.4 γνωρίζουμε ότι το δοσμένο γραμμικό πρόγραμμα είναι μη φραγμένο αν και μόνο αν το δυϊκό του $\min\{b^T y \mid A^T y = c,\ y \geq 0\}$ είναι ανέφικτο.

Από το Λήμμα Farkas για ισότητες (Πόρισμα 7.1), το σύστημα $A^T y = c,\ y \geq 0$ δεν έχει λύση αν και μόνο αν υπάρχει x τέτοιο ώστε $Ax \geq 0$ και $c^T x < 0$. Η τελευταία συνθήκη είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη x έτσι ώστε

$$Ax \leq 0 \text{ και } c^T x > 0.$$

Παρατηρήστε ότι $Ax \leq 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{rec}(P)$.

Αποδείξαμε ότι το γραμμικό πρόγραμμα $\max\{c^T x \mid x \in P\}$ είναι μη φραγμένο αν και μόνο αν υπάρχει $x \in \mathrm{rec}(P)$ τέτοιο ώστε $c^T x > 0$.

Άρα το γραμμικό πρόγραμμα είναι φραγμένο αν και μόνο αν για κάθε $x \in \mathrm{rec}(P)$, $c^T x \leq 0$, δηλ. αν και μόνο αν $c \in (\mathrm{rec}(P))^*$. ∎

Συμβολίζουμε με $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ την κλειστή μπάλα ακτίνας r με κέντρο το x. Για $S \subseteq \mathbb{R}^n$, ένα σημείο $x \in S$ *ανήκει στο εσωτερικό* του S αν υπάρχει μια μπάλα με κέντρο x και ακτίνα $r > 0$ που περιέχεται εξ ολοκλήρου στο S. Συμβολίζουμε με $\mathrm{int}(S)$ το σύνολο των σημείων που ανήκουν στο εσωτερικό του S. Αν $\dim(S) < n$, δεν υπάρχει κανένα εσωτερικό σημείο, πράγμα αφύσικο για τους δικούς μας σκοπούς. Ορίζουμε το *σχετικό εσωτερικό (relative interior)* του συνόλου S, συμβολικά $\mathrm{ri}(S)$, ως εξής:

$$\mathrm{ri}(S) = \{x \in S \mid \exists \varepsilon > 0,\ B_\varepsilon(x) \cap \mathrm{aff}(S) \subseteq S\}. \tag{22.6}$$

Παρατηρήστε ότι αν το S είναι μονοσύνολο, $\mathrm{ri}(S) = S$. Η απόδειξη της παρακάτω πρότασης αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 22.3 *Αν $C \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι πολυεδρικός κώνος,* $\mathrm{ri}(C^*) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in C \setminus \{0\},\ y^T x < 0\}$.

Πρόβλημα 22.4.3 Εύρεση εσωτερικού σημείου στο $(\mathrm{rec}(P))^*$.
Είσοδος: Περιγραφή μυτερού πολυέδρου $\langle P \rangle$ στο $\mathbb{R}^n$.
Έξοδος: Σημείο $y \in \mathrm{ri}((\mathrm{rec}(P))^*)$.

Έστω $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ το μυτερό πολύεδρο. Τότε $\mathrm{rank}(A) = n$. Αφού $\mathrm{rec}(P) = \{x \mid Ax \leq 0\}$ και $(\mathrm{rec}(P))^* = \{y \mid \forall x \in \mathrm{rec}(P),\ y^T x \leq 0\}$, όλες οι γραμμές $a_1, \ldots, a_m$ του πίνακα A ανήκουν στον κώνο $K := (\mathrm{rec}(P))^*$. Θα δείξουμε κατασκευαστικά ότι αφού ο K περιέχει n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα έχει μη κενό σχετικό εσωτερικό. Προφανώς $\mathrm{cone}(\{a_1, \ldots, a_m\}) \subseteq K$. Επιπλέον, από το Λήμμα 9.1 $\mathrm{cone}(\{a_1, \ldots, a_m\}) = K$.

Επειδή $\text{rank}(A) = n$, για κάθε $x \in \text{rec}(P)$, $x \neq 0$, έχουμε ότι $Ax \lneq 0$, δηλ. υπάρχει $i(x) \in [m]$, τ. ώ. $a_{i(x)}^T x < 0$. Ορίζουμε $y^T = \lambda^T A$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}^m$, όπου $\lambda_i > 0$, για κάθε $i \in [m]$. Για κάθε $x \in \text{rec}(P)$, $x \neq 0$,

$$y^T x = \lambda_{i(x)} a_{i(x)}^T x + \sum_{j \neq i(x)} \lambda_j a_j^T x < 0.$$

Επομένως $y \in \text{ri}(K)$. Παρατηρήστε ότι δεν είναι απαραίτητο το $|\,\text{supp}(\lambda)|$ να ισούται με m. Μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ τ. ώ. τα $a_{i_1}, \dots, a_{i_n}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα και να θέσουμε $\lambda_{i_j} > 0$ μόνο για κάθε $i_j \in [I]$. ♣

Λήμμα 22.3 *Έστω μη κενό πολύεδρο Q. Δίνεται $c \in \text{ri}((\text{rec}(Q))^*$ και ορίζουμε $\delta = \max\{c^T x \mid x \in Q\}$. Τότε το πολύεδρο $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in Q,\ c^T x = \delta\}$ είναι πολύτοπο.*

Απόδειξη. Παρατηρήστε ότι από το Λήμμα 22.2, το δ και άρα το F είναι καλά ορισμένα. Έστω $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Ισχύει ότι

$$\text{rec}(F) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \begin{bmatrix} A \\ c^T \\ -c^T \end{bmatrix} x \leq 0\} = \{x \in \text{rec}(Q) \colon\ c^T x = 0\}.$$

Επειδή όμως $c \in \text{ri}((\text{rec}(Q))^*$ το τελευταίο σύνολο περιέχει μόνο το $\vec{0}$. Άρα το F είναι πολύτοπο. ∎

Παρατηρήστε ότι στο επόμενο πρόβλημα η έξοδος θα είναι κορυφή αν το πολύεδρο εισόδου είναι μυτερό.

Πρόβλημα 22.4.4 Διανυσμα σε ελαχιστικη οψη πολυεδρου
Είσοδος: Περιγραφή πολυέδρου $\langle P \rangle$ στο $\mathbb{R}^n$.
Έξοδος: Διάνυσμα που ανήκει σε ελαχιστική όψη του P.

Αν το P δεν είναι μυτερό, αντικαθιστούμε το P με το $Q := P \cap (\text{lin}(P))^{\perp}$ το οποίο γνωρίζουμε από το Λήμμα 22.1 ότι είναι μυτερό. Αν το P είναι μυτερό, θέτουμε $Q := P$.

Ο αλγόριθμος για το Πρόβλημα 22.4.3 μας δίνει διάνυσμα $c \in \text{ri}\left((\text{rec}(Q))^*\right)$. Συμβολίζουμε με F την όψη του Q που περιέχει τις λύσεις του γραμμικού προγράμματος $\max\{c^T x \mid x \in P\}$. Σύμφωνα με το Λήμμα 22.3 το F είναι πολύτοπο. Ο αλγόριθμος για το Πρόβλημα 22.2.1 υπολογίζει μια κορυφή v του F. (Προφανώς το v είναι και κορυφή του Q). Επιστρέφουμε στην έξοδο το v.

Αποδεικνύουμε την ορθότητα του αλγορίθμου. Έστω $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Εάν $Q = P$, ο αλγόριθμος είναι προφανώς ορθός αφού επιστρέφει κορυφή του P. Αν $Q = P \cap (\text{lin}(P))^{\perp}$ παρατηρήστε την περιγραφή του Q στη σχέση (22.5). Οποιαδήποτε κορυφή του Q ικανοποιεί με ισότητα n γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις εκ των οποίων ακριβώς $\text{rank}(A)$ πρέπει να προέρχονται από το σύστημα $Ax \leq b$. Από το Πόρισμα 16.1, όλες οι κορυφές του Q ανήκουν σε ελαχιστικές όψεις του P. Το διάνυσμα v που επιστρέφει ο αλγόριθμος ανήκει λοιπόν σε ελαχιστική όψη του P. ♣

22.5 Εύρεση εσωτερικού σημείου πολυέδρου

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε το πρόβλημα της εύρεσης σημείου στο σχετικό εσωτερικό ενός πολυέδρου. Σύμφωνα με τη σχέση (22.6) προκύπτει εύκολα ότι ένα σημείο $y \in \text{ri}(P)$ αν και μόνο αν το

y δεν περιέχεται σε μια γνήσια όψη του P. Το λήμμα που ακολουθεί δίνει μερικούς ακόμα ισοδύναμους χαρακτηρισμούς.

Λήμμα 22.4 *Έστω $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα πολύτοπο διάστασης k ($k \leq n$). Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για ένα $y \in P$.*

(i) $y \in \mathrm{ri}(P)$.

(ii) Το y δεν περιέχεται σε μια γνήσια όψη του P.

(iii) Αν η ανισότητα $a^T x \leq a_0$ είναι έγκυρη για το P και $a^T y = a_0$ τότε $a^T x = a_0$ για κάθε $x \in P$.

(iv) Το y μπορεί να παρασταθεί ως $y = \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i$ όπου $x_0, \ldots, x_k$ αφινικά ανεξάρτητα σημεία του P, για κάθε i $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$.

(v) Το y μπορεί να παρασταθεί ως $y = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k x_i$ όπου $x_0, \ldots, x_k$ αφινικά ανεξάρτητα σημεία του P.

Πρόβλημα 22.5.1 Εσωτερικο σημειο πολυεδρου
Είσοδος: Περιγραφή πολυέδρου $\langle P \rangle$ στο $\mathbb{R}^n$.
Έξοδος: Σημείο $v \in \mathrm{ri}(P)$.

Τρέχουμε τον αλγόριθμο για το Πρόβλημα 22.4.2. Παίρνουμε $k+1$ αφινικά ανεξάρτητα σημεία $v_0, \ldots, v_k$ του πολυτόπου Q όπου $k = \dim(P)$. Με βάση το Λήμμα 22.4(v), το σημείο

$$v = \frac{1}{k+1}(v_0 + \ldots + v_k)$$

ανήκει στο $\mathrm{ri}(Q)$, άρα και $v \in \mathrm{ri}(P)$. ♣

Απομένει να αποδείξουμε το λήμμα.

Απόδειξη του Λήμματος 22.4. Αν $k = 0$ δηλαδή το $P = \{y\}$ για κάποιο $y \in \mathbb{R}^n$ παίρνουμε ότι $\mathrm{ri}(P) = \{y\}$ και το Λήμμα ισχύει τετριμμένα. Υποθέτουμε στο εξής ότι $k \geq 1$.

Έστω ότι ισχύει το (ii) και η ανισότητα $a^T x \leq a_0$ είναι έγκυρη για το P και $a^T y = a_0$. Αν η ανισότητα δεν είναι υποδηλούμενη ισότητα για το P τότε το y ανήκει σε γνήσια όψη του P. Δείξαμε (ii) $\Rightarrow$ (iii). Αντιστρόφως, αν ισχύει το (iii) καμία ανισότητα δεν μπορεί να ορίσει γνήσια όψη που περιέχει το y. Επομένως (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

Το (v) έχει τετριμμένα ως συνέπεια το (iv). Αν ισχύει το (iv), τότε δεδομένου ότι η $a^T x \leq a_0$ είναι έγκυρη για το P

$$a_0 = a^T y = \sum_{i=0}^k \lambda_i a^T x_i \leq \sum_{i=0}^k \lambda_i a_0 = a_0.$$

Αυτό μπορεί να ισχύει μόνο αν $a^T x_i = a_0$ για όλα τα i. Κατά συνέπεια $\mathrm{aff}(x_0, \ldots, x_k) \subseteq \{x \mid a^T x_i = a_0\}$. Όμως από τον Ισχυρισμό 11.1 $\mathrm{aff}(x_0, \ldots, x_k) = \mathrm{aff}(P)$. Επομένως έπεται το (iii).

Θεωρούμε την ελαχιστική αναπαράσταση $P = \{x \mid A^= x = b^=,\ A^+ x \leq b^+\}$. Έστω τώρα ότι ισχύει το (iii). Συμπεραίνουμε ότι $A^+ y < b^+$. Συνεπώς για κάθε $u \in L := N(A^=) = \{x \mid A^= x = 0\}$ έχουμε ότι $y + \varepsilon u \in P$, αν $\varepsilon > 0$ είναι αρκετά μικρό. Από το Θεώρημα 11.1, $n - \mathrm{rank}(A^=) = k$. Θεωρούμε k γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $u_1, \ldots, u_k \in L$. Υπάρχουν $k+1$ τιμές $\varepsilon > 0$, έ. ώ. $y + \varepsilon u \in P$ για $u = u_1, \ldots, u_k, -(u_1 + \ldots + u_k)$. Διαλέγουμε $\varepsilon' > 0$ τη μικρότερη από αυτές. Ισχύει ότι

$$y = \frac{1}{k+1}\left[(y - \varepsilon'(u_1 + \ldots + u_k)) + (y + \varepsilon' u_1) + \ldots + (y + \varepsilon' u_k)\right].$$

Αφήνουμε σαν άσκηση να δειχθεί ότι τα διανύσματα $u_1, \ldots, u_k, -(u_1 + \ldots + u_k)$, είναι αφινικά ανεξάρτητα. Δείξαμε ότι υπάρχει μια αναπαράσταση της μορφής που απαιτεί η (v), άρα και η (iv). Συνεπώς ισχύει και η ισοδυναμία (v) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (iii).

Έστω ότι το y περιέχεται σε γνήσια όψη του P. Τότε ικανοποιεί με ισότητα τουλάχιστον μία από τις ανισώσεις $\alpha^T x \leq \beta$ του συστήματος $A^+ x \leq b^+$. Επίσης το α πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητο από τις γραμμές του πίνακα $A^=$. Ειδάλλως αν $\alpha^T = \lambda^T A^=$, για κάθε $x \in P$, $\alpha^T x = \lambda^T b^=$ και η $\alpha^T x \leq \beta$ είναι υποδηλούμενη ισότητα. Για τον πίνακα

$$D = \begin{bmatrix} A^= \\ \alpha^T \end{bmatrix}$$

έχουμε ότι $\dim(N(D)) = \dim(N(A^=)) - 1 = k - 1$. Επομένως υπάρχει $u \in N(A^=) \setminus N(D)$ για το οποίο $A^= u = 0$ αλλά $Du \neq 0$. Για οσοδήποτε μικρό $\varepsilon > 0$, ένα από τα σημεία $y \pm \varepsilon u$ δεν ανήκει στο P. Επομένως $y \notin \mathrm{ri}(P)$.

Αν το $y \in P$ δεν περιέχεται σε γνήσια όψη του P έχουμε ήδη αποδείξει παραπάνω ότι για κατάλληλα μικρό $\varepsilon > 0$ οποιοδήποτε διάνυσμα της μορφής $y + \varepsilon u$ το οποίο ανήκει στο $\mathrm{aff}(P)$ πρέπει να ανήκει στο P. Άρα $y \in \mathrm{ri}(P)$. Αποδείξαμε και την ισοδυναμία (i) $\Leftrightarrow$ (ii) και η απόδειξη είναι πλήρης. ∎

22.6 Αποδείξεις που παραλείφθηκαν

Θεώρημα 22.1 *Έστω μυτερό πολύεδρο P και διάνυσμα $c \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε το $\max\{c^T x \mid x \in P\}$ ορίζεται. Για κατάλληλα μικρό $\varepsilon > 0$, το γραμμικό πρόγραμμα $\max\{\bar{c}^T x \mid x \in P\}$, όπου $\bar{c} = c + (\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n)^T$, έχει μοναδική βέλτιστη λύση σε κορυφή x_0 του P η οποία επίσης μεγιστοποιεί τη συνάρτηση $c^T x$ επί του P.*

Απόδειξη. Διαισθητικά, για αρκετά μικρό ε μια κορυφή x_0 του P που αποτελεί λύση του $\max\{c^T x \mid x \in P\}$, παραμένει λύση και του $\max\{\bar{c}^T x \mid x \in P\}$. Ορίζεται ως συνάρτηση του x_0 μια περιοχή ανοχής γύρω από το c όπου αυτό ισχύει. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο Θεώρημα 1 στο [4]. Απομένει να δείξουμε ότι η μόνη βέλτιστη λύση για το δεύτερο γραμμικό πρόγραμμα είναι κορυφή του P. Από τα παραπάνω συνάγεται ότι αυτή η κορυφή θα είναι η x_0.

Έστω $m \times n$ πίνακας A και διάνυσμα b έ. ώ. $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι το γραμμικό πρόγραμμα

$$\max\{\bar{c}^T x \mid Ax \leq b\} \tag{22.7}$$

έχει βέλτιστη λύση x^* που δεν είναι κορυφή του πολυέδρου P. Οι περιορισμοί που είναι ενεργοί στο x^* ορίζουν ένα $m' \times n$ υποσύστημα $A'x = b'$ όπου $\mathrm{rank}(A') < n$. Έστω $I \subseteq [m]$ το σύνολο των δεικτών των μη ενεργών περιορισμών. Προφανώς $|I| = m - m'$.

Το δυϊκό του (22.7) είναι το

$$\min\{b^T y \mid A^T y = \bar{c},\ y \geq 0\}. \tag{22.8}$$

Λόγω της συμπληρωματικής χαλαρότητας σε μία βέλτιστη λύση του (22.8) όλες οι μεταβλητές που αντιστοιχούν σε γραμμές του A (ισοδύναμα σε στήλες του A^T) που δεν ανήκουν στον A' είναι ίσες με μηδέν. Επομένως οι βέλτιστες β.ε.λ. του (22.8) προκύπτουν από τις β.ε.λ. του (εφικτού!) $n \times m'$ συστήματος

$$(A')^T y = \bar{c},\ y \in \mathbb{R}^{m'}_{\geq 0}. \tag{22.9}$$

Συμβολίζουμε με n' το $\operatorname{rank} A'$. Γνωρίζουμε ότι $n' < n$ και $n' \leq m'$. Κρατάμε n' γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις από το σύστημα $(A')^T y = \bar{c}$ και προκύπτει το ισοδύναμο $n' \times m'$ σύστημα

$$Cy = \bar{c}',\ y \in \mathbb{R}^{m'}_{\geq 0}. \tag{22.10}$$

Ορίζουμε ως K το σύνολο των δεικτών των γραμμών του $(A')^T$ που απαρτίζουν τον πίνακα C. Προφανώς $|K| = n'$. Το $\bar{c}'$ είναι ο περιορισμός του $\bar{c}$ στις γραμμές του K.

Παρατήρηση 22.1 $[n] \setminus K \neq \varnothing$.

Οι μη μηδενικές τιμές μιας β.ε.λ. του συστήματος (22.10) προκύπτουν από την επίλυση ενός $n' \times n'$ συστήματος $Dy = \bar{c}'$ όπου D είναι ένας αντιστρέψιμος υποπίνακας του C. Έστω $J \subseteq [m]$ το σύνολο των δεικτών των n' στηλών του A^T από τις οποίες προέκυψε (με αφαίρεση $n - n'$ γραμμών) ο πίνακας D. Προφανώς $J \subseteq [m] \setminus I$. Επίσης, επειδή οι n' στήλες του D είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^{n'}$, κατά μείζονα λόγο οι αντίστοιχες στήλες του A^T είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.

Ορίζουμε τώρα μια βέλτιστη β.ε.λ. y^* του (22.8) ως εξής. Για $i \in J$, η τιμή της μεταβλητής y_i^* ορίζεται από την τιμή της αντίστοιχης μεταβλητής στο n'-διάνυσμα $D^{-1}\bar{c}'$. Για $i \in [m] \setminus J$, θέτουμε $y_i^* = 0$. Το διάνυσμα y^* παίρνει μη μηδενικές τιμές σε μεταβλητές που αντιστοιχούν σε κάποιες από τις γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A' που δεικτοδοτούνται από το J. Οι στήλες αυτές ορίζουν έναν $n \times n'$ υποπίνακα B' του A'. Επειδή το πολύεδρο είναι μυτερό, $\operatorname{rank}(A) = n$ άρα ο B' μπορεί να επεκταθεί σε αντιστρέψιμο $n \times n$ υποπίνακα B του A^T. Η y^* είναι β.ε.λ. του (22.8) με βάση B. Επειδή ικανοποιεί τη συμπληρωματική χαλαρότητα είναι και βέλτιστη.

Για κάθε $i \in [n] \setminus K$, από την εφικτότητα της y^* παίρνουμε

$$(A^T)_i y^* = \bar{c}_i = c_i + \varepsilon^i \tag{22.11}$$

όπου με $(A^T)_i$ συμβολίσαμε την iστή γραμμή του A^T. Η παράσταση $(A^T)_i y^* - c_i - \varepsilon^i$ είναι ένα πολυώνυμο με μεταβλητή ε. Το μονώνυμο ε^i δεν εμφανίζεται σε καμία γραμμή του $\bar{c}'$, συνεπώς κάθε μη μηδενικό στοιχείο του y^* είναι ένα πολυώνυμο ως προς ε που δεν περιέχει το μονώνυμο ε^i. Άρα το μονώνυμο αυτό δεν εμφανίζεται ούτε στην παράσταση $(A^T)_i y^*$. Επομένως στο πολυώνυμο $(A^T)_i y^* - c_i - \varepsilon^i$ ο συντελεστής του ε^i είναι ίσος με -1. Το πολυώνυμο δεν μπορεί να είναι ταυτοτικά μηδέν. Αν διαλέξουμε τιμή του ε που να μη συμπίπτει με καμία από τις ρίζες του πολυωνύμου, η (22.11) δεν μπορεί να ισχύει. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα η βέλτιστη του λύση (22.7) είναι μία κορυφή x_0 του P. ∎

Αναφορές

[1] Martin Grötschel, László Lovász, and Alexander Schrijver. *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, volume 2 of *Algorithms and Combinatorics*. Springer, 1988.

[2] P. N. Klein. *Coding the Matrix: Linear Algebra through Applications to Computer Science*. Newtonian Press, 2013.

[3] A. Schrijver. *Theory of linear and integer programming*. John Wiley and Sons, 1986.

[4] R. E. Wendell. The tolerance approach to sensitivity analysis in linear programming. *Management Science*, 31:564–578, 1985.