	Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού	
Διάλεξη 23: 10.02.2021		Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος
	Γραφείς: Σ. Κ.	

23.1 Πολικότητα

Εισάγουμε μια έννοια γεωμετρικής δυϊκότητας.

Ορισμός 23.1 *Αν $X \subseteq \mathbb{R}^n$ το πολικό σύνολο X^* του X ορίζεται ως*

$$X^* = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z^T x \leq 1 \text{ για κάθε } x \in X\}.$$

Για παράδειγμα $(\mathbb{R}^n)^* = \{0\}$ και $(\{0\})^* = \mathbb{R}^n$. Επίσης αν L είναι γραμμικός υπόχωρος τότε $L^* = L^\perp$ (γιατί;). Το X^* είναι πάντα ένα κυρτό σύνολο που περιέχει την αρχή των αξόνων. Αν το X είναι πολύτοπο που περιέχει την αρχή των αξόνων, το X^* έχει μια απλή περιγραφή. Έδρες του X αντιστοιχούν σε κορυφές του X^* και αντιστρόφως. Παρατηρήστε ότι και τα δύο σύνολα ανήκουν στο $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 23.1 *Έστω P ένα πολύεδρο στο $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το 0. Τότε:*

(i) *Το P^* είναι πολύεδρο.*

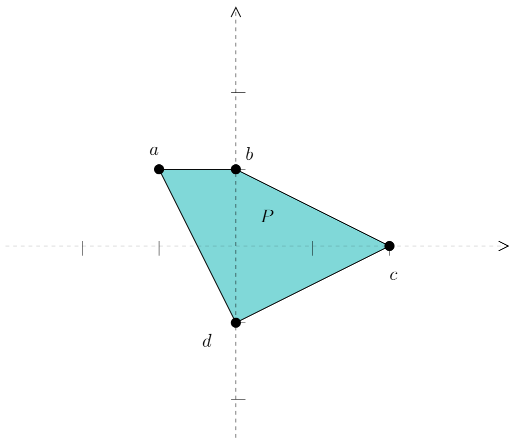
(ii) $P^{**} = P$.

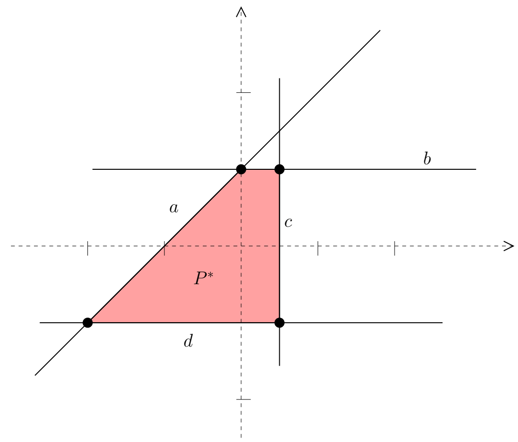
(iii) $x \in P$ *ανν* $\forall z \in P^*\colon z^T x \leq 1$.

(iv) *Αν* $P = \mathrm{conv}(0, x_1, \ldots, x_m) + \mathrm{cone}(y_1, \ldots, y_t)$, *τότε* $P^* = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z^T x_i \leq 1, \forall i \in [m],\ z^T y_j \leq 0, \forall j \in [t]\}$ *και αντιστρόφως.*

Απόδειξη. Έστω $P = \mathrm{conv}(0, x_1, \ldots, x_m) + \mathrm{cone}(y_1, \ldots, y_t)$, και $P' = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z^T x_i \leq 1, \forall i \in [m],\ z^T y_j \leq 0, \forall j \in [t]\}$. Θα δείξουμε ότι $P^* = P'$. Έστω $z \in P^*$. Από τον ορισμό του πολικού συνόλου, $z^T x_i \leq 1, \forall i \in [m]$. Επειδή $0 \in P$, για κάθε $j \in [t]$ και $\lambda \geq 0$ $\lambda y_j \in P$. Άρα $\lambda z^T y_j \leq 1$, για κάθε $\lambda \geq 0$. Συνεπάγεται ότι $z^T y_j \leq 0$. Δείξαμε ότι $P^* \subseteq P'$. Έστω $z \in P'$, θεωρούμε τυχόν $x \in P$. Υπάρχουν $\nu_i \geq 0$, $i \in [m]$, $\lambda_j \geq 0$, $j \in [t]$, τ. ώ. $x = \sum_{i\in[m]} \nu_i x_i + \sum_{j\in[t]} \lambda_j y_j$ και $\sum_{i\in[m]} \nu_i \leq 1$. Έχουμε ότι $z^T x = \sum_{i\in[m]} \nu_i z^T x_i + \sum_{j\in[t]} \lambda_j z^T y_j \leq \sum_{i\in[m]} \nu_i \leq 1$. Επομένως $z \in P^*$ και $P' \subseteq P^*$. Άρα $P^* = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z^T x_i \leq 1, \forall i \in [m],\ z^T y_j \leq 0, \forall j \in [t]\}$. Επίσης το P^* είναι προφανώς πολύεδρο. Έχουμε δείξει το (i) και τη μία κατεύθυνση του (iv).

Αν $x \in P$, τότε για κάθε $z \in P^*$, $z^T x \leq 1$. Άρα $P \subseteq P^{**}$. Για τον αντιστρόφο εγκλεισμό, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $y \in P^{**} \backslash P$. Υπάρχει έγκυρη ανισότητα $\alpha^T x \leq \beta$ για το P η οποία παραβιάζεται από το y, δηλ. $\alpha^T y > \beta$. Αφού $0 \in P$, πρέπει $\beta \geq 0$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Αν $\beta > 0$, $(1/\beta)\alpha \in P^*$. Όμως $(1/\beta)\alpha^T y > 1$ που έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι $y \in P^{**}$. Αν $\beta = 0$,





Σχήμα 23.1: Το πολύτοπο $P = \text{conv}(a, b, c, d)$ και το πολικό του P^*.

τότε $\lambda\alpha \in P^*$ για κάθε $\lambda \geq 0$. Άρα πρέπει $\lambda\alpha^T y \leq 1$ για κάθε $\lambda \geq 0$. Όμως $\alpha^T y > 0$, άρα για κατάλληλο $\lambda > 0$, $\lambda\alpha^T y > 1$, άτοπο. Άρα τελικά $P^{**} \subseteq P$. Αποδείξαμε το (ii).

Το (iii) προκύπτει άμεσα από το (ii). $x \in P \Leftrightarrow x \in P^{**} \Leftrightarrow (\forall z \in P^* \colon z^T x \leq 1)$.

Απομένει να δείξουμε το αντίστροφο του (iv). Έστω $P^* = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z^T x_i \leq 1, \forall i \in [m],\ z^T y_j \leq 0, \forall j \in [t]\}$ το πολικό κάποιου πολυέδρου P. Προφανώς $0 \in P^*$. Επίσης από το (iii), $0 \in P$. Ορίζουμε $Q = \text{conv}(0, x_1, \ldots, x_m) + \text{cone}(y_1, \ldots, y_t)$. Από το ευθύ του (iv), $Q^* = P^*$. Από το (ii), $Q = Q^{**} = P^{**} = P$. ∎

Προσέξτε σε ποια βήματα της παραπάνω απόδειξης χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση ότι $0 \in P$. Ένα παράδειγμα πολικού συνόλου απεικονίζεται στο Σχήμα 23.1.

Άσκηση 23.1 *Για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις βρείτε αν υπάρχουν τμήματα της απόδειξης του Θεωρήματος 23.1 που εξακολουθούν να ισχύουν.*

1. *P πολύτοπο, που δεν περιέχει απαραίτητα το 0, τ. ώ. $P = \text{conv}(x_1, \ldots, x_m)$.*
2. *P πολύτοπο τ. ώ. $P = \text{conv}(x_1, \ldots, x_m)$ και $0 \in \text{int}(P)$.*

Θα χρησιμεύσει αργότερα η ακόλουθη παρατήρηση επί του Θεωρήματος 23.1(iv). Η απόδειξη της αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 23.1 *Έστω P ένα πολύεδρο στο $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το 0. Αν $\{0, x_1, \ldots, x_m\}$ και $\{y_1, \ldots, y_t\}$ είναι ελαχιστικά σύνολα για τα οποία $P = \text{conv}(0, x_1, \ldots, x_m) + \text{cone}(y_1, \ldots, y_t)$, τότε η αναπαράσταση του P^* ως $\{z \in \mathbb{R}^n \mid z^T x_i \leq 1, \forall i \in [m],\ z^T y_j \leq 0, \forall j \in [t]\}$ είναι ελαχιστική.*

Αν το C είναι πολυεδρικός κώνος, το πολικό σύνολο C^* ταυτίζεται με την έννοια του δυϊκού κώνου, όπως την ορίσαμε στη Διάλεξη 10. Δηλαδή $C^* = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in C,\ z^T x \leq 0\}$.

Πόρισμα 23.1 *Αν $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ και $b \in \mathbb{R}^m_{>0}$, τότε $0 \in \text{int}(P)$, $P^* = \text{conv}(\{\frac{1}{b_i} a_i^T \mid i \in [m]\})$ όπου a_i^T είναι οι γραμμές του πίνακα A. Επίσης $P^{**} = P$.*

Παράδειγμα 23.1 *Το πολικό πολύεδρο του υπερκύβου $\{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 1, i \in [n]\}$ είναι το* πολύτοπο διασταύρωσης (cross-polytope) *που ορίζεται ως* $\mathrm{conv}(\{\pm e_i : i \in [n]\})$. *Το πολικό του τρισδιάστατου κύβου είναι το οκτάεδρο.*

Πόρισμα 23.2 *Έστω P ένα πολύεδρο στο $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το 0. Τότε:*

(i) *Το P^* είναι φραγμένο πολύεδρο ανν $0 \in \mathrm{int}(P)$.*

(ii) *Το $\mathrm{aff}(P^*)$ είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του $\mathrm{lin}(P)$. Επίσης $\dim(P^*) = n - \dim(\mathrm{lin}(P))$.*

(iii) *Το P είναι πλήρους διάστασης ανν το P^* είναι μυτερό.*

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και $b \in \mathbb{R}^m$ τ. ώ. $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Αφού $0 \in P$, πρέπει $b \geq 0$. Τότε $P = \{x \mid a_i^T x \leq 1,\ i = 1, \ldots, k$ και $a_i^T x \leq 0, i = k+1, \ldots, m\}$. Μπορούμε να υποθέσουμε χβτγ ότι αν $a_i = 0$, $i \leq k$. Παρατηρούμε ότι $0 \in \mathrm{int}(P)$ ανν $k = m$, δηλ. $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \mathbf{1}\}$.

Από το Θεώρημα 23.1(iv), $P^* = \mathrm{conv}(0, a_1, \ldots, a_k) + \mathrm{cone}(a_{k+1}, \ldots, a_m)$. Επομένως το P^* είναι φραγμένο ανν $k = m$ δηλ. ανν $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \mathbf{1}\}$. Αποδείχθηκε το (i).

Αφού $P^* = \mathrm{conv}(0, a_1, \ldots, a_k) + \mathrm{cone}(a_{k+1}, \ldots, a_m)$, $\dim(P^*) = \mathrm{rank}(a_1, \ldots, a_m)$ (βλ. Διάλεξη 22). Άρα $\dim(P^*) = \mathrm{rank}(A)$. Αφού $\mathrm{lin}(P) = \{x \mid Ax = 0\}$, $\dim(\mathrm{lin}(P)) = n - \mathrm{rank}(A)$. Συνεπώς $\dim(P^*) = n - \dim(\mathrm{lin}(P))$. Ισχύει επίσης (γιατί;) ότι

$$\mathrm{aff}(P^*) = \mathrm{span}(a_1, \ldots, a_m).$$

Επομένως το $\mathrm{aff}(P^*)$ είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του $\mathrm{lin}(P)$. Αποδείχθηκε το (ii).

Από το 23.1(ii) $P^{**} = P$. Εφαρμόζοντας το (ii) για το P παίρνουμε ότι το P έχει διάσταση k ανν το $\mathrm{lin}(P^*)$ έχει διάσταση $n - k$. Αποδείχθηκε το (iii). ∎

23.2 Δυϊκά πολύτοπα

Η υπόθεση ότι για ένα πολύεδρο P ισχύει ότι $0 \in \mathrm{int}(P)$ είναι αρκετά ισχυρή, αλλά αν μας ενδιαφέρουν συνδυαστικά / γεωμετρικά χαρακτηριστικά του P μπορεί να επιτευχθεί χβτγ. Αν το P είναι μη κενό, μπορούμε να το προβάλλουμε στο $\mathrm{aff}(P)$ και να μετατοπίσουμε το πολύεδρο P' που προκύπτει ώστε ένα εσωτερικό του σημείο x_0 να πέσει στο 0. Άρα δουλεύουμε με το πολύεδρο $(P' - x_0)$. Από το Θεώρημα 23.1(iv) προκύπτει μια εξαιρετικά σημαντική αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ψ ανάμεσα στις κορυφές του P^* και τις έδρες του P.

Θεώρημα 23.2 *Δίνεται πολύτοπο $P \subseteq \mathbb{R}^n$ για το οποίο $0 \in \mathrm{int}(P)$. Υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ψ ανάμεσα στις κορυφές του P^* και τις έδρες του P.*

Απόδειξη. Έστω πολύεδρο P για το οποίο $0 \in \mathrm{int}(P)$. Από το Πόρισμα 23.2 παίρνουμε ότι: το P^* είναι πολύτοπο (βλ. (i)) και το P είναι πλήρους διάστασης (βλ. (iii)). Αν το P είναι επίσης πολύτοπο, από το Πόρισμα 23.2(ii) και το P^* είναι πλήρους διάστασης.

Κάθε κορυφή z του P^* ικανοποιεί με ισότητα n γραμμικά ανεξάρτητους περιορισμούς της μορφής $z^T x_{i_j} \leq 1$, όπου $\{x_{i_j}\}_{j\in[n]}$ σύνολο κορυφών του P. Η όψη του P

$$F = \{x \in P \mid z^T x = 1\}$$

είναι γνήσια όψη (γιατί το P είναι πλήρους διάστασης) και περιέχει n γραμμικά (άρα και αφινικά) ανεξάρτητες κορυφές του P. Επομένως $\dim(F) = n - 1$ και η F είναι έδρα του P. Ορίζουμε $\psi(z) = F$. Αν z_1, z_2 είναι διακεκριμένες κορυφές του P^* προκύπτει εύκολα ότι $\psi(z_1)$, $\psi(z_2)$ είναι διακεκριμένες έδρες του P.

Αφού το P είναι πολύτοπο γνωρίζουμε ότι μια τυχούσα έδρα του F περιέχει n αφινικά ανεξάρτητες κορυφές (βλ. Πρόταση 22.1). Επίσης υπάρχει υπερεπίπεδο $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid z_0^T x = 1\}$ τέτοιο ώστε $F = P \cap H$ και $z_0^T x < 1$ για κάθε $x \in P \setminus F$ (γιατί;). Ισχύει ότι $z_0 \in P^*$ και επίσης z_0 κορυφή του P για την οποία $\psi(z_0) = F$. Άρα η συνάρτηση ψ είναι επί, και κατά συνέπεια αμφιμονοσήμαντη. ∎

Η παραπάνω αντιστοιχία μπορεί να γενικευτεί ως εξής. Με $\mathcal{F}(P)$ συμβολίζουμε το σύνολο των όψεων ενός πολυέδρου P. Έστω τα πολύεδρα K, K' αμφότερα διάστασης d. Μια συνάρτηση $\Psi : \mathcal{F}(K) \to \mathcal{F}(K')$ καλείται *inclusion-reversing* αν για κάθε δύο όψεις F_1, F_2 του K με $F_1 \subset F_2$ ισχύει ότι $\Psi(F_1) \supset \Psi(F_2)$.

Ορισμός 23.2 *Έστω τα πολύτοπα K, K' αμφότερα διάστασης d. Αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη inclusion-reversing συνάρτηση $\Psi : \mathcal{F}(K) \to \mathcal{F}(K')$ τα δύο πολύτοπα καλούνται* δυϊκά *το ένα του άλλου.*

Αν τα K, K' είναι δυϊκά, έπεται ότι $\Psi(\varnothing) = K'$, $\Psi(K) = \varnothing$, και $\dim(F) + \dim(\Psi(F)) = d - 1$ για κάθε $F \in \mathcal{F}(K)$.

Έστω P ένα πολύτοπο και F μία όψη του. Ορίζουμε το ακόλουθο σύνολο

$$\widehat{F} = \{y \in P^* \mid y^T x = 1,\ \forall x \in F\}.$$

Θεώρημα 23.3 *Αν το P είναι πολύτοπο και $0 \in \operatorname{int}(P)$ η απεικόνιση $\Psi(F) = \widehat{F}$ είναι 1-1 και inclusion-reversing απεικόνιση από το $\mathcal{F}(P)$ στο $\mathcal{F}(P^*)$. Επιπλέον $\widehat{\Psi(F)} = F$ για κάθε όψη F του P.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση προκύπτει ότι τα P και P^* είναι πλήρους διάστασης την οποία συμβολίζουμε με d. Επίσης υπάρχει πίνακας A ώστε $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid Ax \leq \mathbf{1}\}$.

Προφανώς $\widehat{\varnothing} = P^*$ και $\widehat{P} = \varnothing$. Ασχολούμαστε στο εξής με τις γνήσιες όψεις του P. Θα δείξουμε πρώτα ότι η $\widehat{F}$ είναι όψη του P^*. Έστω $x_0 \in \operatorname{ri}(F)$ και θεωρούμε την όψη F^* του P^* που ορίζεται ως εξής:

$$F^* = \{y \in P^* \mid y^T x_0 = 1\}.$$

Προφανώς $\widehat{F} \subseteq F^*$. Θα δείξουμε ότι $\widehat{F} = F^*$. Αν $F = \{x_0\}$ ισχύει τετριμμένα. Θεωρούμε $y \in P^*$ τέτοιο ώστε $y \notin \widehat{F}$. Τότε υπάρχει $x_1 \in F$ ώστε $y^T x_1 < 1$. Επειδή $x_0 \in \operatorname{ri}(F)$, υπάρχει $x_2 \in F$ τ. ώ.

$$x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2,$$

με $0 < \lambda < 1$. Όμως το $y \in P^*$, άρα $y^T x_2 \leq 1$. Κατά συνέπεια, $y^T x_0 < 1$, άρα $y \notin F^*$. Συμπεραίνουμε ότι $\widehat{F} = F^*$.

Αν έχουμε όψεις F_1, F_2 του P με $F_1 \subset F_2$, προφανώς $\widehat{F_2} \subseteq \widehat{F_1}$. Υπάρχει έγκυρη ανισότητα $a^T x \leq 1$ για το P η οποία ικανοποιείται με ισότητα από όλα τα στοιχεία του F_1 αλλά παραβιάζεται από τουλάχιστον ένα στοιχείο του F_2. Επομένως $a \in \widehat{F_1} \setminus \widehat{F_2}$ και $\widehat{F_2} \subset \widehat{F_1}$. Συνεπώς η απεικόνιση Ψ είναι inclusion-reversing.

Αν δείξουμε ότι για κάθε όψη F του P $\widehat{\Psi(F)} = F$ θα έχουμε δείξει ότι η Ψ είναι 1-1. Έχουμε ότι

$$\widehat{\Psi(F)} = \{z \in P^{**} \mid z^T y = 1,\ \forall y \in \widehat{F}\}.$$

Αφού $P^{**} = P$ ισχύει ότι $F \subseteq \widehat{\Psi(F)}$. Θεωρούμε $z_0 \in P$ τέτοιο ώστε $z_0 \notin F$. Επειδή F όψη του P, υπάρχει έγκυρη ανισότητα για το P της μορφής $y_0^T x \leq 1$ ώστε για το υπερεπίπεδο $H = \{x \in \mathbb{R}^d \mid y_0^T x = 1\}$ να ισχύει $F = P \cap H$. Άρα $y_0 \in P^*$ και ειδικότερα $y_0 \in \widehat{F}$. Αφού $z_0 \notin F$ θα έχουμε $y_0^T z_0 < 1$. Άρα $z_0 \notin \widehat{\Psi(F)}$. Επομένως $\widehat{\Psi(F)} = F$.

Απομένει να δείξουμε ότι η Ψ είναι επί. Επιβεβαιώστε ότι κάθε έγκυρη ανισότητα για το P^* είναι της μορφής $x^T y \leq 1$, όπου x είναι σημείο του P. Θεωρούμε μία τυχούσα γνήσια όψη F^* του P^* και ένα μεγιστικό σύνολο S κορυφών του P για το οποίο

$$F^* = \{y \in P^* \mid v^T y = 1,\ \forall v \in S\}.$$

(Πρέπει $\operatorname{rank}(S) = d - \dim(F^*)$.) Επειδή το S μεγιστικό, για κάθε κορυφή $v \notin S$ του P υπάρχει $y \in F^*$ για το οποίο $y^T v < 1$. Παίρνουμε ότι

$$F^* = \{y \in P^* \mid x^T y = 1,\ \forall x \in \operatorname{conv}(S)\}.$$

Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\operatorname{conv}(S)$ ορίζει μία όψη του P. Διαλέγουμε $y_0 \in \operatorname{ri}(F^*)$, ορίζουμε το υπερεπίπεδο $H = \{x \in \mathbb{R}^d \mid y_0^T x = 1\}$. Έστω F η όψη του P όπου $F = P \cap H$. Προφανώς $\operatorname{conv}(S) \subseteq F$. Θα δείξουμε ότι $\operatorname{conv}(S) = F$. Έστω $x \in P$, $x \notin \operatorname{conv}(S)$. Υπάρχει $y_1 \in F^*$ ώστε $y_1^T x < 1$. Επειδή $y_0 \in \operatorname{ri}(F^*)$, υπάρχει $y_2 \in F^*$ τ. ώ.

$$y_0 = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2,$$

με $0 < \lambda < 1$. Όμως το $y_2 \in P^*$, άρα $y_2^T x \leq 1$. Κατά συνέπεια, $y_0^T x < 1$, άρα $x \notin F$. Συμπεραίνουμε ότι $\operatorname{conv}(S) = F$. Η απόδειξη ολοκληρώνεται με την παρατήρηση ότι $\Psi(F) = \widehat{F} = F^*$. ∎

Πόρισμα 23.3 *Αν το P είναι πολύτοπο και $0 \in \operatorname{int}(P)$ τότε το P^* είναι δυϊκό πολύτοπο του P.*

Ο Ορισμός 23.2 είναι συνδυαστικής φύσης. Όπως σχολιάσαμε στην αρχή αυτής της ενότητας η υπόθεση ότι $0 \in \operatorname{int}(P)$ μπορεί να επιτευχθεί χωρίς βλάβη της γενικότητας, για την ακρίβεια χωρίς να αλλοιωθεί το πλέγμα (lattice) που ορίζει τη μερική διάταξη $\subseteq$ επί του $\mathcal{F}(P)$. Αποδείξαμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 23.4 *Για κάθε πολύτοπο ορίζεται ένα δυϊκό πολύτοπο.*

23.3 Εύρεση έδρας πολυτόπου

Πρόβλημα 23.3.1 Εδρα πολυτοπου
Είσοδος: Περιγραφή πολυτόπου $\langle P \rangle$ πλήρους διάστασης στο $\mathbb{R}^n$.
Έξοδος: Περιγραφή έδρας του P.

Τρέχοντας τον αλγόριθμο για το Πρόβλημα 22.5.1 βρίσκουμε σημείο x_0 στο $\mathrm{ri}(P)$. Επειδή το P είναι πλήρους διάστασης, $\mathrm{ri}(P) = \mathrm{int}(P)$. Για το πολύτοπο $Q := (P - x_0)$ ξέρουμε ότι $0 \in \mathrm{int}(Q)$. Από το Πόρισμα 23.2(i) το $(P - x_0)^*$ είναι πολύτοπο. Θυμίζουμε ότι

$$(P - x_0)^* = \{z \mid z^T(x - x_0) \leq 1, \ \forall x \in P\}.$$

Ο αλγόριθμος για το Πρόβλημα 22.2.1 υπολογίζει μια κορυφή z_0 του $(P - x_0)^*$. Με βάση το Θεώρημα 23.2 (το οποίο αφορά πολύτοπα που περιέχουν το 0 στο εσωτερικό τους), το σύνολο $\{(x - x_0) \in (P - x_0) \mid z_0^T(x - x_0) = 1\}$ είναι έδρα του $(P - x_0)$ και κατά συνέπεια το σύνολο

$$P \cap \{x \mid z_0^T x = z_0^T x_0 + 1\}$$

είναι έδρα του P. ♣

23.4 Αλγοριθμική εκδοχή του Θεωρήματος του Καραθεοδωρή

Πρόβλημα 23.4.1 Θεωρημα Καραθεοδωρη για πολυτοπα
Είσοδος: Περιγραφή πολυτόπου $\langle P \rangle$ στο $\mathbb{R}^n$, σημείο $y \in P \cap \mathbb{Q}^n$.
Έξοδος: Αφινικά ανεξάρτητες κορυφές $x_0, \ldots, x_d$ του P και $\lambda_0, \ldots, \lambda_d \geq 0$ τ. ώ. $\lambda_0 + \ldots + \lambda_d = 1$ και $y = \lambda_0 x_0 + \ldots + \lambda_d x_d$.

Θα περιγράψουμε τον αλγόριθμο με επαγωγή στη διάσταση d του P. Αν $d = 0$, ο αλγόριθμος επιστρέφει το y. Έστω $d > 0$. Βρίσκουμε πρώτα μία κορυφή x_0 του P (Πρόβλημα 22.2.1). Αν $y = x_0$ ο αλγόριθμος τερματίζει. Αν $y \neq x_0$ θεωρούμε την ακόλουθη ημιευθεία που ξεκινάει από το x_0 και διέρχεται από το y:

$$L := \{x_0 + \lambda(y - x_0) \mid \lambda \geq 0\}.$$

Υπολογίζουμε το τελευταίο σημείο y' της ημιευθείας L που ανήκει στο P βρίσκοντας το $\lambda' = \max\{\lambda \mid \lambda \geq 0, \ x_0 + \lambda(y - x_0) \in P\}$. και θέτοντας $y' := x_0 + \lambda'(y - x_0)$. Το σημείο y' ικανοποιεί με ισότητα μια επιπλέον ανισότητα από αυτές που ικανοποιούσε το x_0, άρα το y' βρίσκεται πάνω σε γνήσια όψη του P. Θα περιγράψουμε αυτή την όψη χρησιμοποιώντας πολικότητα. Από τον ορισμό του πολικού συνόλου

$$(P - x_0)^* = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z^T(x - x_0) \leq 1, \ \forall x \in P\}.$$

Θέτουμε $w = y' - x_0$ και υπολογίζουμε το διάνυσμα

$$z_0 = \arg\max\{w^T z \mid z \in (P - x_0)^*\}.$$

Το z_0 είναι καλά ορισμένο γιατί $w^T z \leq 1$, για κάθε $z \in (P - x_0)^*$.

Ισχυρισμός 23.1 *Με τα w, z_0 ορισμένα όπως παραπάνω $w^T z_0 = 1$.*

Απόδειξη ισχυρισμού. Έστω $X = \{0, x_1, \ldots, x_m\}$ το σύνολο των κορυφών του πολυτόπου $(P - x_0)$. Από το Θεώρημα 23.1(iv) παίρνουμε ότι

$$(P - x_0)^* = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z^T x_i \leq 1, \ i \in [m]\}.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 23.1 και το Λήμμα 13.1 για κάθε $i \in [m]$, υπάρχει $z^i \in (P - x_0)^*$ τέτοιο ώστε $(z^i)^T x_i = 1$ και $(z^i)^T x_j < 1$ για $j \neq i$. Επομένως για κάθε $x \in (P - x_0)$, το οποίο προκύπτει ως *θετικός* κυρτός συνδυασμός με διάνυσμα συντελεστών λ_S των στοιχείων ενός $S \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$ υπάρχει $z \in (P - x_0)^*$ τέτοιο ώστε $z^T x = 1$. Το z προκύπτει ως κυρτός συνδυασμός με διάνυσμα συντελεστών λ_S επί του συνόλου $\{z^i \mid x_i \in S\}$. Το y' βρίσκεται σε όψη του P που δεν περιέχει το x_0, άρα το $y' - x_0$ βρίσκεται σε όψη του $(P - x_0)$ που δεν περιέχει την κορυφή 0. Συνεπώς υπάρχει $z \in (P - x_0)^*$ τέτοιο ώστε $z^T(y' - x_0) = 1$. ∎

Συμπεραίνουμε ότι αφού το σύνολο

$$F = \{x \in P \mid z_0^T(x - x_0) = 1\}$$

περιέχει το το y' είναι μία μη κενή όψη του P. Φυσικά $x_0 \notin F$ άρα το F είναι μία γνήσια όψη του P. Από την επαγωγική υπόθεση μπορούμε να γράψουμε το y' ως κυρτό συνδυασμό αφινικά ανεξάρτητων κορυφών του F. Αφού το y είναι στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το x_0 με το y' μπορούμε να γράψουμε το y ως κυρτό συνδυασμό των κορυφών του P. Για την αφινική ανεξαρτησία του συνόλου των κορυφών που χρησιμοποιούνται στον κυρτό συνδυασμό αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το x_0 δεν ανήκει στο $\mathrm{aff}(F)$. ♣