Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 10: 12.11.2014 — Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Ευάγγελος Αναγνωστόπουλος, Πέτρος Μπαρμπαγιάννης

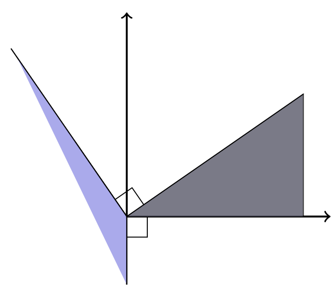
Ορισμός 10.1 *Αν το ζεύγος πινάκων (A, R) είναι ΔΠ-ζεύγος για έναν κώνο P, τότε και το ζεύγος πινάκων (R^T, A^T) είναι ΔΠ-ζεύγος για έναν κώνο P^*. Σε αυτή τη περίπτωση, ο κώνος P^* καλείται ο* δυϊκός (ή ο πολικός) *κώνος του P.*

Από τον Ορισμό 8.3 του ζεύγους διπλής περιγραφής προκύπτει ότι:

$$P^* = \{y \in \mathbb{R}^d \mid R^T y \leq 0\} = \{y \in \mathbb{R}^d \mid y = A^T \mu, \mu \geq 0\}$$

Χρήσιμη άσκηση: Δείξτε ότι $P^* = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \forall x \in P, y^T x \leq 0\}$.

Σχηματικά, ένα παράδειγμα ενός κώνου C με τον δυϊκό του C^* είναι το ακόλουθο:



Σχήμα 10.1: Ένας κώνος C με τον δυϊκό του C^*

Σημείωση: είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι, $P = \mathbb{R}^d \Rightarrow P^* = \emptyset$.

Ορισμός 10.2 *Έστω δύο πολύεδρα $V, R \subseteq \mathbb{R}^n$. Το* άθροισμα Minkowski *των V και R ορίζεται ως το σύνολο $V + R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists v \in V, r \in R : x = v + r\}$.*

Αν οποιοδήποτε από τα δύο σύνολα V, R είναι το κενό σύνολο, τότε $V + R = \emptyset$.

Ορισμός 10.3 *Ένα σύνολο σημείων καλείται πολύτοπο αν είναι το κυρτό κάλυμμα πεπερασμένων το πλήθος διανυσμάτων.*

Θεώρημα 10.1 (Θεώρημα Minkowski-Weyl για πολύεδρα) *Ένα σύνολο $P \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι πολύεδρο ανν $P = Q + C$ για κάποιο πολύτοπο $Q \subset \mathbb{R}^n$ και κάποιον πεπερασμένα παραγόμενο κώνο $C \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη:
($\Rightarrow$): Έστω ένα πολύεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Ο πολυεδρικός κώνος $P' = \left\{\binom{x}{\lambda} \mid x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} : Ax - \lambda b \leq 0\right\}$, από το θεώρημα Minkowksi-Weyl για κώνους (Θεώρημα 9.2), παράγεται από πεπερασμένο πλήθος διανυσμάτων $\binom{x_1}{\lambda_1}, \binom{x_2}{\lambda_2}, \ldots, \binom{x_m}{\lambda_m}$. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι τα διανύσματα $\binom{x_i}{\lambda_i}$ έχουν $\lambda_i = 0$ ή $\lambda_i = 1$. Ορίζουμε:

$$Q = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix} x_i \\ \lambda_i \end{pmatrix} \mid i = 1, \ldots, m \ \&\ \lambda_i = 1\right\}$$
$$C = \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} x_i \\ \lambda_i \end{pmatrix} \mid i = 1, \ldots, m \ \&\ \lambda_i = 0\right\}$$

Θα δείξουμε ότι το αρχικό πολύεδρο P μπορεί να γραφτεί ως $P = Q + C$.

$$x \in P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in P' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_m \\ \lambda_m \end{pmatrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\exists \rho_1, \ldots, \rho_m \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ τ.ω. } \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_1^m \rho_i \begin{pmatrix} x_i \\ \lambda_i \end{pmatrix} \tag{10.1}$$

Υποχρεωτικά, $\sum\limits_{i \mid \lambda_i = 1} \rho_i = 1$, επειδή $\lambda_i = 1$ ή $\lambda_i = 0$. Δηλαδή:

$$\sum_1^m \rho_i \begin{pmatrix} x_i \\ \lambda_i \end{pmatrix} = \sum_{i \mid \lambda_i = 1} \rho_i \begin{pmatrix} x_i \\ \lambda_i \end{pmatrix} + \sum_{i \mid \lambda_i \neq 1} \rho_i \begin{pmatrix} x_i \\ \lambda_i \end{pmatrix} \overset{10.1}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\sum_{i \mid \lambda_i = 1} \rho_i \begin{pmatrix} x_i \\ \lambda_i \end{pmatrix}}_{\text{κυρτός συνδυασμός από το } Q} + \underbrace{\sum_{i \mid \lambda_i \neq 1} \rho_i \begin{pmatrix} x_i \\ \lambda_i \end{pmatrix}}_{\text{κωνικός συνδυασμός από το } C}$$

Οπότε $P = Q + C$.
($\Leftarrow$): Αντιστρόφως, έστω το σύνολο $P = Q + C$, όπου Q πολύτοπο και C πεπερασμένα παραγόμενος κώνος. Δηλαδή:

$$Q = \operatorname{conv}\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$$
$$C = \operatorname{cone}\{y_1, y_2, \ldots, y_t\}$$

Οπότε,

$$x_0 \in P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_m \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} y_t \\ 0 \end{pmatrix}\right\} := D \tag{10.2}$$

και σύμφωνα με το Θεώρημα Minkowski-Weyl για κώνους (θεώρημα 9.2), ο πεπερασμένα παραγόμενος κώνος D είναι και πολυεδρικός. Δηλαδή της μορφής:

$$D = \left\{\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \mid Ax + \lambda b \leq 0\right\} \text{ για κάποια } A, b$$

Άρα,:

$$x_0 \in P \overset{10.2}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix} \in D \Leftrightarrow Ax_0 + 1 * b \leq 0 \Leftrightarrow Ax_0 \leq -b$$

Άρα το σύνολο P είναι πολύεδρο. ∎

Πόρισμα 10.1 *(Θεώρημα πεπερασμένης βάσης για πολύτοπα)*
Ένα σύνολο P είναι πολύτοπο ανν το P είναι ένα φραγμένο πολύεδρο, δηλαδή γράφεται ως $P = Q + C$, όπου $C = \{\vec{0}\}$.

Ορισμός 10.4 *Ο* χαρακτηριστικός κώνος (characteristic or recession cone) *ενός πολυέδρου* $P = \{x \mid Ax \leq b\}, P \neq \varnothing$ *είναι ο κώνος:*

$$\mathrm{rec}(P) = \{y \mid x + y \in P,\ \forall x \in P\} = \{y \mid Ay \leq 0\}$$

Ιδιότητες του χαρακτηριστικού κώνου:

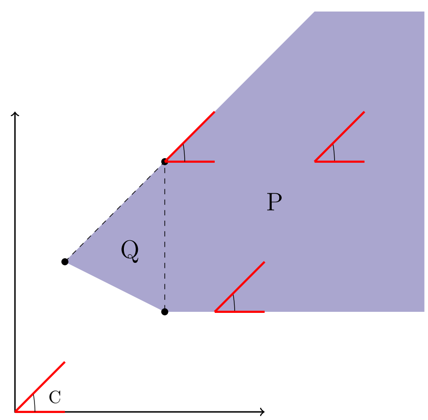
i) $y \in \mathrm{rec}(P) \Leftrightarrow \exists x \in P$ τ.ω. $x + \lambda y \in P,\ \forall \lambda \geq 0$

ii) $P + \mathrm{rec}(P) = P$

iii) P φραγμένο $\Leftrightarrow \mathrm{rec}(P) = \{0\}$

iv) Αν $P = Q + C$, όπου Q πολύτοπο και C πολυεδρικός κώνος, τότε $C = \mathrm{rec}(P)$

Ορισμός 10.5 *Κάθε διάνυσμα* $x \in \mathrm{rec}(P) \setminus \{\vec{0}\}$ *καλείται* άπειρη διεύθυνση *του* P *ή* ακτίνα (ray).



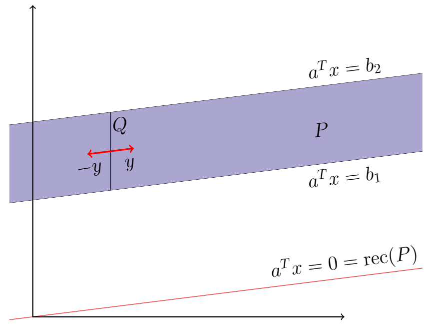
Σχήμα 10.2: Η διάσπαση ενός πολυέδρου P στις συνιστώσες του Q και C. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν άπειρες επιλογές για το πολύτοπο Q, αλλά ο χαρακτηριστικός κώνος είναι μοναδικός. Βλέπουμε επίσης και την ιδιότητα (i) του χαρακτηριστικού κώνου ότι, αν είμαστε μέσα στο P και προχωράμε σύμφωνα με το κώνο C, θα παραμένουμε πάντα μέσα στο πολύεδρο. Τέλος, προφανώς : $\mathrm{lin}(P) = \{\vec{0}\}$

.

Ορισμός 10.6 *Το* lineality space *του πολυέδρου* $P = \{x \mid Ax \leq b\}$ *ορίζεται ως το σύνολο* $\mathrm{lin}(P) = \mathrm{rec}(P) \cap -\mathrm{rec}(P) = \{y \mid Ay = 0\} = \mathrm{nullspace}(A)$.

Παρατηρήσεις:

- Τετριμμένα, $\forall P,\ \vec{0} \in \mathrm{lin}(P)$.
- Για ένα διάνυσμα y, $y \in \mathrm{lin}(P) \Leftrightarrow y \in \mathrm{rec}(P)\ \&\ -y \in \mathrm{rec}(P)$ (βλ. Σχήμα 10.3).
- Αν $\mathrm{rec}(P) \supset \{\vec{0}\}$, τότε το P περιέχει σίγουρα ημιευθείες (ιδιότητα (iii) χαρακτηριστικού κώνου).
- Αν $\mathrm{lin}(P) \supset \{\vec{0}\}$, τότε το P περιέχει σίγουρα ευθείες (βλ. Σχήμα 10.3).



Σχήμα 10.3: Θεωρούμε το πολύεδρο $P = \{x \mid b_1 \leq a^T x \leq b_2\}$. Παρατηρούμε ότι $y \in \mathrm{rec}(P) \Leftrightarrow -y \in \mathrm{rec}(P)$. Άρα σε αυτή τη περίπτωση, $\mathrm{lin}(P) = \mathrm{rec}(P)$.

Ορισμός 10.7 *Αν* $\mathrm{lin}(P) = \{\vec{0}\}$ *για κάποιο πολύεδρο* P*, τότε το* P *καλείται μυτερό (pointed).*

Παρατήρηση: Το P είναι μυτερό ανν το P δεν περιέχει ευθεία (βλ. Σχήμα 10.2).

Επιπλέον, με βάση το Θεώρημα 5.1, παίρνουμε το εξής:

Πρόταση 10.1 *Το* P *έχει τουλάχιστον ένα ακραίο σημείο ανν το* P *είναι μυτερό.*