Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 11: 18.11.2014 — Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Μανιάτης Σπυρίδων & Μυρισιώτης Δημήτριος

11.1 Περί lineality space

Υπενθυμίζεται η έννοια του lineality space και παρατίθεται ένα παράδειγμα σχετικό με αυτόν τον χώρο.

Ορισμός 11.1 *Έστω πολύεδρο $P = \{x \mid Ax \le b\}$. Ως* lineality space *του πολυέδρου P, ή* lin(P), *ορίζεται η ποσότητα:*

$$\mathrm{rec}(P) \cap -\mathrm{rec}(P) = \{y \mid Ay = 0\}.$$

Εναλλακτικά, κάποιος δύναται να γράψει

$$\mathrm{lin}(P) := \mathrm{rec}(P) \cap -\mathrm{rec}(P) = \{y \mid Ay = 0\}.$$

Ο συγκεκριμένος όρος, μέχρι στιγμής, δεν έχει αποδωθεί ικανοποιητικά στην Ελληνική. Οπότε, προς το παρόν, χρησιμοποιείται αυτούσια η έκφρασή του στην Αγγλική.

Στην συνέχεια, παρατίθεται το Παράδειγμα 11.1 που διευκολύνει την κατανόηση του lineality space.

Παράδειγμα 11.1 *Έστω ημίχωρος P, με*

$$P = \left\{x \mid \alpha^T x \le \beta\right\}.$$

Στο Σχήμα 11.1, παρουσιάζεται η μορφή του P με τρόπο τέτοιο ώστε εξηγείται η φύση του χώρου lin(P), *ως χώρου που περιέχει τις κατευθύνσεις που* δεν *οδηγούν εκτός του πολυέδρου.*

11.2 Υποδηλούμενες Ισότητες

Ακολουθεί ο ορισμός των υποδηλούμενων ισοτήτων, που ανακύπτουν σε ένα σύστημα της μορφής $Ax \le b$. Επίσης, παρουσιάζονται κάποια βασικά αποτελέσματα σχετικά με τις ισότητες αυτές.

Ορισμός 11.2 *Έστω σύστημα ανισώσεων $Ax \le b$. Μία ανισότητα*

$$\alpha_i^T x \le b_i$$

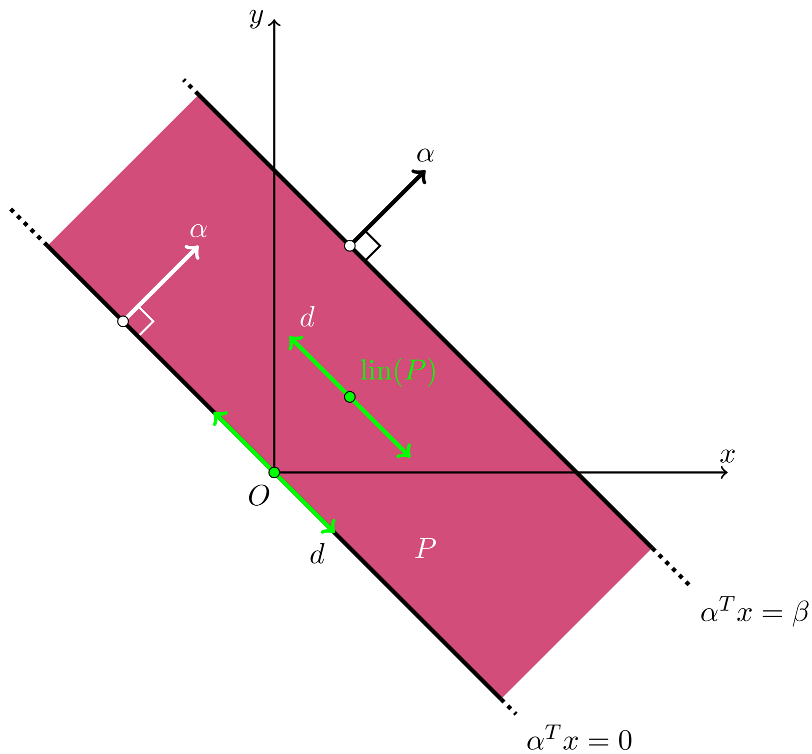
καλείται υποδηλούμενη ισότητα (implicit equality) *αν*

$$Ax \le b \Longrightarrow \alpha_i^T x = b_i.$$

Έστω, τώρα, ένα πολύεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$. Από τον Ορισμό 11.2, συνεπάγεται ότι

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\} \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i^T x = b_i\right\}.$$

Επίσης, με βάση τον Ορισμό 11.2, κάποιος μπορεί να διαχωρίσει το σύστημα $Ax \le b$ σε δύο υποσυστήματα:



Σχήμα 11.1: Οι χώροι P και $\text{lin}(P)$.

- Στο υποσύστημα $A^{=}x \leq b^{=}$, που περιέχει τις υποδηλούμενες ισότητες του $Ax \leq b$, και
- το υποσύστημα $A^{+}x \leq b^{+}$, που περιέχει τις υπόλοιπες ανισότητες του $Ax \leq b$.

Τα αντίστοιχα σύνολα δεικτών είναι τα $I^{=}$ και I^{+} και, αν $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, τότε

$$I^{=} \cup I^{+} = I^{=} \uplus I^{+} = \{1, \ldots, m\}.$$

Οπότε, σχετικά με το πολύεδρο P, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P &= \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid A^{=}x \leq b^{=},\, A^{+}x \leq b^{+}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid A^{=}x = b^{=},\, A^{+}x \leq b^{+}\right\}. \end{aligned}$$

Η Πρόταση 11.1, που ακολουθεί, αιτιολογεί την ύπαρξη κάποιου $\bar{x}$ με ειδικές ιδιότητες σχετιζόμενες με την έννοια της υποδηλούμενης ισότητας.

Πρόταση 11.1 *Έστω πολύεδρο P. Αν $P \neq \emptyset$ τότε*

$$(\exists \bar{x}) \left[A^{=}\bar{x} = b^{=} \;\&\; A^{+}\bar{x} < b^{+}\right].$$

Απόδειξη: Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, ανάλογα αν $I^{+} = \emptyset$ ή $I^{+} \neq \emptyset$.

$[I^{+} = \emptyset]$ Στην περίπτωση αυτή το συμπέρασμα συνάγεται τετριμμένα, καθώς αν $I^{+} = \emptyset$ κάθε ανισότητα είναι υποδηλούμενη ισότητα.

$[I^+ \neq \emptyset]$ Στην περίπτωση αυτή, έχουμε ότι

$$\left(\forall i \in I^+\right)\left(\exists x^i \in P\right)\left[\alpha_i^T x^i < b_i\right].$$

Οπότε, θέτουμε

$$\bar{x} = \frac{1}{|I^+|} \sum_{i \in I^+} x^i,$$

και παρατηρούμε ότι το συγκεκριμένο $\bar{x}$ ικανοποιεί τις

$$A^= \bar{x} = b^= \ \& \ A^+ \bar{x} < b^+.$$

$\blacksquare$

Ακολουθεί το Θεώρημα 11.1 που αποδεικνύει μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες, για μη κενά πολύεδρα, βασιζόμενο στην έννοια των υποδηλούμενων ισοτήτων.

Θεώρημα 11.1 *Έστω πολύεδρο P, με*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

και $P \neq \emptyset$. Τότε

(*i*) $\text{aff}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x = b^=\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x \leq b^=\}$, *και*

(*ii*) $\dim(P) = n - \text{rank}(A^=)$.

Απόδειξη: Αποδεικνύουμε χωριστά κάθε ιδιότητα του πολυέδρου P.

(*i*) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\text{aff}(P) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x = b^=\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x \leq b^=\} \subseteq \text{aff}(P).$$

Ισχύει ότι

$$P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x = b^=\}$$

οπότε,

$$\text{aff}(P) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x = b^=\}.$$

Επίσης λαμβάνουμε — τετριμμένα — ότι

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x = b^=\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x \leq b^=\}.$$

Άρα, μέχρι στιγμής, έχουμε ότι

$$\text{aff}(P) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x = b^=\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x \leq b^=\},$$

οπότε, απομένει να αποδειχθεί το

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x \leq b^=\} \subseteq \text{aff}(P).$$

Προς αυτήν την κατεύθυνση, θεωρούμε ένα αυθαίρετο σημείο $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, με

$$A^= \hat{x} \leq b^=,$$

και θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι $\hat{x} \in \text{aff}(P)$.

Παρατηρούμε ότι διαχωρίζονται δύο περιπτώσεις — ανάλογα αν $\hat{x} \in P$ ή $\hat{x} \notin P$.

[$\hat{x} \in P$] Έστω ότι $\hat{x} \in P$. Τότε $\hat{x} \in \text{aff}(P)$ και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

[$\hat{x} \notin P$] Έστω, τώρα, ότι $\hat{x} \notin P$. Τότε, από την Πρόταση 11.1, υπάρχει κάποιο $\bar{x}$ τέτοιο ώστε

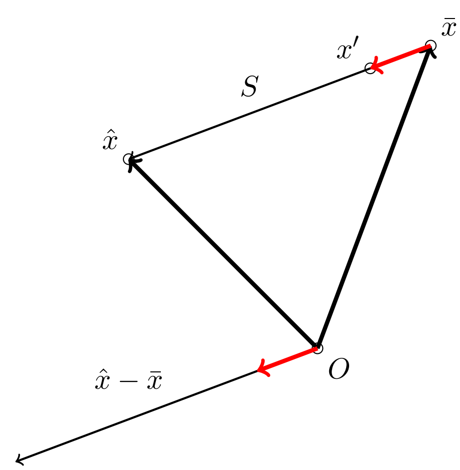
$$A^{=}\bar{x} = b^{=} \ \& \ A^{+}\bar{x} < b^{+}. \tag{11.1}$$

Στην συνέχεια, θεωρούμε — ως S — το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $\hat{x}$ και $\bar{x}$. Παρατηρούμε ότι

$$S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^{=}x \leq b^{=}\}.$$

Θεωρούμε, επίσης, ένα σημείο $x' \in S$ τέτοιο ώστε βρίσκεται «αρκούντως κοντά» στο $\bar{x}$ (βλ. Σχήμα 11.2) ή, για κάποιο «μικρό» $\varepsilon > 0$,

$$x' := \bar{x} + \varepsilon(\hat{x} - \bar{x}) = (1 - \varepsilon)\bar{x} + \varepsilon\hat{x}.$$



Σχήμα 11.2: Τα διανύσματα $\bar{x}$, $\hat{x}$ και x', και το ευθύγραμμο τμήμα S.

Έχουμε ότι $x', \bar{x} \in S$. Αν, επιπλέον, αποδείξουμε ότι $x' \in P$ μπορούμε να συνάγουμε ότι

$$\bar{x}, x' \in \text{aff}(P) \tag{11.2}$$

και, από την (11.2), ότι η ευθεία που φέρει το τμήμα S ανήκει στο $\text{aff}(P)$. Τελικά, επειδή $\hat{x} \in S$, λαμβάνουμε, επίσης, ότι

$$\hat{x} \in \text{aff}(P)$$

και η απόδειξη του (i) ολοκληρώνεται.

Όμως, η δική μας εργασία δεν τελείωσε — απομένει να δείξουμε ότι, όντως, $x' \in P$!

Για να το δείξουμε αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι

(a) $A^{=}x' \leq b^{=}$, και,

(b) $A^{+}x' \leq b^{+}$.

Με βάση την μορφή του x', όπου $\theta_i = \varepsilon(\hat{x}_i - \bar{x}_i)$,

$$x' = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 + \theta_1 \\ \bar{x}_2 + \theta_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n + \theta_n \end{bmatrix}$$

και την (11.1), παρατηρούμε ότι — για κατάλληλο ε — η απόλυτη τιμή κάθε θ_i είναι «αρκούντως μικρή». Συνεπώς ικανοποιούνται οι συνθήκες (a) και (b) και, άρα, λαμβάνουμε ότι $x' \in P$.

(ii) Ισχύει ότι

$$\text{aff}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^{=}x = b^{=}\}$$

και, από τον ορισμό της διάστασης, ότι

$$\dim(P) = \dim(\text{aff}(P)).$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \dim(\text{aff}(P)) &= \dim\left(\{x \in \mathbb{R}^n \mid A^{=}x = b^{=}\}\right) \\ &\overset{\text{Γρ. Άλγ.}}{=} n - \text{rank}(A^{=}). \end{aligned}$$

Το ζητούμενο συνάγεται συνδυάζοντας τις παρατιθέμενες εξισώσεις. Η απόδειξη είναι, πλέον, πλήρης.
∎