

## 11.1 Περί lineality space

Υπενθυμίζεται η έννοια του lineality space και παρατίθεται ένα παράδειγμα σχετικό με αυτόν τον χώρο.

**Ορισμός 11.1** Έστω πολύεδρο  $P = \{x \mid Ax \leq b\}$ . Ως lineality space του πολυέδρου  $P$ , ή  $\text{lin}(P)$ , ορίζεται η ποσότητα:

$$\text{rec}(P) \cap -\text{rec}(P) = \{y \mid Ay = 0\}.$$

Εναλλακτικά, κάποιος δύναται να γράψει

$$\text{lin}(P) := \text{rec}(P) \cap -\text{rec}(P) = \{y \mid Ay = 0\}.$$

Ο συγκεκριμένος όρος, μέχρι στιγμής, δεν έχει αποδωθεί ικανοποιητικά στην Ελληνική. Οπότε, προς το παρόν, χρησιμοποιείται αυτούσια η έκφρασή του στην Αγγλική.

Στην συνέχεια, παρατίθεται το Παράδειγμα 11.1 που διευκολύνει την κατανόηση του lineality space.

**Παράδειγμα 11.1** Έστω ημίχωρος  $P$ , με

$$P = \{x \mid \alpha^T x \leq \beta\}.$$

Στο Σχήμα 11.1, παρουσιάζεται η μορφή του  $P$  με τρόπο τέτοιο ώστε εξηγείται η φύση του χώρου  $\text{lin}(P)$ , ως χώρου που περιέχει τις κατευθύνσεις που δεν οδηγούν εκτός του πολυέδρου.

## 11.2 Υποδηλούμενες Ισότητες

Ακολουθεί ο ορισμός των υποδηλούμενων ισοτήτων, που ανακύπτουν σε ένα σύστημα της μορφής  $Ax \leq b$ . Επίσης, παρουσιάζονται κάποια βασικά αποτελέσματα σχετικά με τις ισότητες αυτές.

**Ορισμός 11.2** Έστω σύστημα ανισώσεων  $Ax \leq b$ . Μία ανισότητα

$$\alpha_i^T x \leq b_i$$

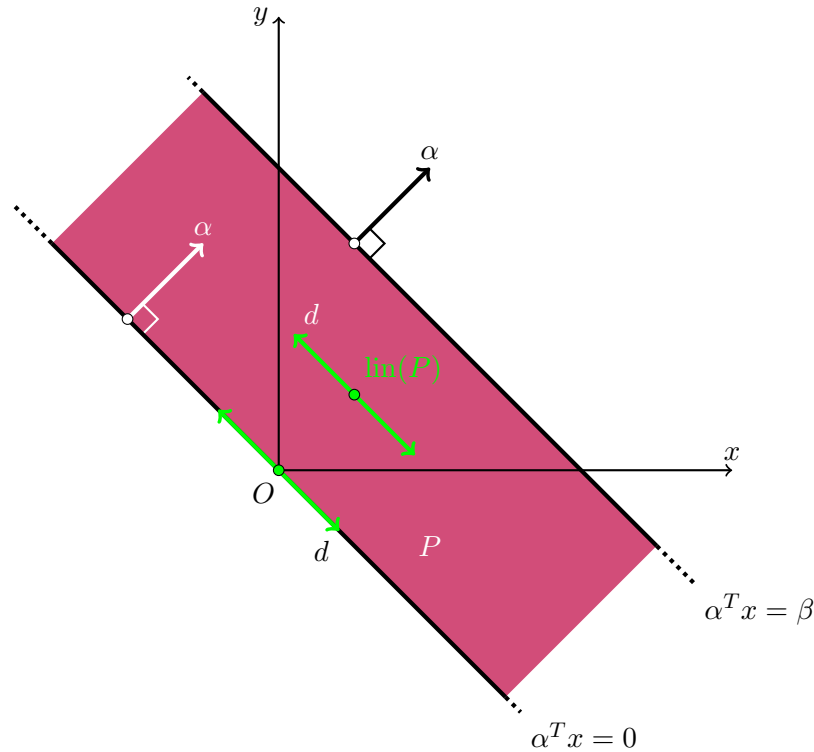
καλείται υποδηλούμενη ισότητα (implicit equality) αν

$$Ax \leq b \implies \alpha_i^T x = b_i.$$

Έστω, τώρα, ένα πολύεδρο  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ . Από τον Ορισμό 11.2, συνεπάγεται ότι

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i^T x = b_i\}.$$

Επίσης, με βάση τον Ορισμό 11.2, κάποιος μπορεί να διαχωρίσει το σύστημα  $Ax \leq b$  σε δύο υποσυστήματα:



Σχήμα 11.1: Οι χώροι  $P$  και  $\text{lin}(P)$ .

- Στο υποσύστημα  $A^-x \leq b^-$ , που περιέχει τις υποδηλούμενες ισότητες του  $Ax \leq b$ , και
- το υποσύστημα  $A^+x \leq b^+$ , που περιέχει τις υπόλοιπες ανισότητες του  $Ax \leq b$ .

Τα αντίστοιχα σύνολα δεικτών είναι τα  $I^-$  και  $I^+$  και, αν  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , τότε

$$I^- \cup I^+ = I^- \uplus I^+ = \{1, \dots, m\}.$$

Οπότε, σχετικά με το πολύεδρο  $P$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^-x \leq b^-, A^+x \leq b^+\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^-x = b^-, A^+x \leq b^+\}. \end{aligned}$$

Η Πρόταση 11.1, που ακολουθεί, αιτιολογεί την ύπαρξη κάποιου  $\bar{x}$  με ειδικές ιδιότητες σχετιζόμενες με την έννοια της υποδηλούμενης ισότητας.

**Πρόταση 11.1** Έστω πολύεδρο  $P$ . Αν  $P \neq \emptyset$  τότε

$$(\exists \bar{x}) [A^- \bar{x} = b^- \ \& \ A^+ \bar{x} < b^+].$$

**Απόδειξη:** Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, ανάλογα αν  $I^+ = \emptyset$  ή  $I^+ \neq \emptyset$ .

$[I^+ = \emptyset]$  Στην περίπτωση αυτή το συμπέρασμα συνάγεται τετριμμένα, καθώς αν  $I^+ = \emptyset$  κάθε ανισότητα είναι υποδηλούμενη ισότητα.

$[I^+ \neq \emptyset]$  Στην περίπτωση αυτή, έχουμε ότι

$$(\forall i \in I^+) (\exists x^i \in P) [\alpha_i^T x^i < b_i].$$

Οπότε, θέτουμε

$$\bar{x} = \frac{1}{|I^+|} \sum_{i \in I^+} x^i,$$

και παρατηρούμε ότι το συγκεκριμένο  $\bar{x}$  ικανοποιεί τις

$$A^{\bar{}} \bar{x} = b^{\bar{}} \text{ \& } A^+ \bar{x} < b^+.$$

■

Ακολουθεί το Θεώρημα 11.1 που αποδεικνύει μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες, για μη κενά πολύεδρα, βασιζόμενο στην έννοια των υποδηλούμενων ισοτήτων.

**Θεώρημα 11.1** Έστω πολύεδρο  $P$ , με

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

και  $P \neq \emptyset$ . Τότε

(i)  $\text{aff}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^{\bar{}}x = b^{\bar{}}\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^{\bar{}}x \leq b^{\bar{}}\}$ , και

(ii)  $\dim(P) = n - \text{rank}(A^{\bar{}})$ .

**Απόδειξη:** Αποδεικνύουμε χωριστά κάθε ιδιότητα του πολυέδρου  $P$ .

(i) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\text{aff}(P) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^{\bar{}}x = b^{\bar{}}\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^{\bar{}}x \leq b^{\bar{}}\} \subseteq \text{aff}(P).$$

Ισχύει ότι

$$P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^{\bar{}}x = b^{\bar{}}\}$$

οπότε,

$$\text{aff}(P) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^{\bar{}}x = b^{\bar{}}\}.$$

Επίσης λαμβάνουμε — τετριμμένα — ότι

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid A^{\bar{}}x = b^{\bar{}}\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^{\bar{}}x \leq b^{\bar{}}\}.$$

Άρα, μέχρι στιγμής, έχουμε ότι

$$\text{aff}(P) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^{\bar{}}x = b^{\bar{}}\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^{\bar{}}x \leq b^{\bar{}}\},$$

οπότε, απομένει να αποδειχθεί το

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid A^{\bar{}}x \leq b^{\bar{}}\} \subseteq \text{aff}(P).$$

Προς αυτήν την κατεύθυνση, θεωρούμε ένα αυθαίρετο σημείο  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ , με

$$A^{\bar{}}\hat{x} \leq b^{\bar{}},$$

και θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι  $\hat{x} \in P$ .

Παρατηρούμε ότι διαχωρίζονται δύο περιπτώσεις — ανάλογα αν  $\hat{x} \in P$  ή  $\hat{x} \notin P$ .

$[\hat{x} \in P]$  Έστω ότι  $\hat{x} \in P$ . Τότε  $\hat{x} \in \text{aff}(P)$  και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

$[\hat{x} \notin P]$  Έστω, τώρα, ότι  $\hat{x} \notin P$ . Τότε, από την Πρόταση 11.1, υπάρχει κάποιο  $\bar{x}$  τέτοιο ώστε

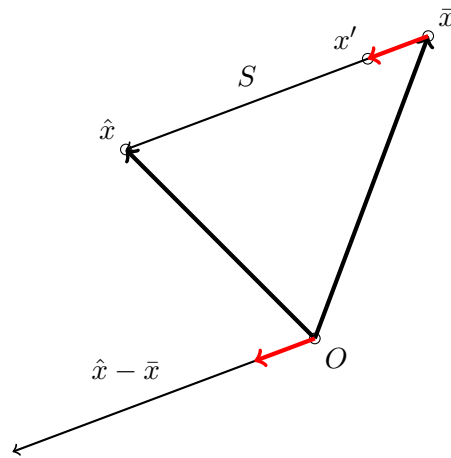
$$A^-\bar{x} = b^- \text{ \& } A^+\bar{x} < b^+. \quad (11.1)$$

Στην συνέχεια, θεωρούμε —ως  $S$ — το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία  $\hat{x}$  και  $\bar{x}$ . Παρατηρούμε ότι

$$S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^-x \leq b^-\}.$$

Θεωρούμε, επίσης, ένα σημείο  $x' \in S$  τέτοιο ώστε βρίσκεται «αρκούντως κοντά» στο  $\bar{x}$  (βλ. Σχήμα 11.2) ή, για κάποιο «μικρό»  $\varepsilon > 0$ ,

$$x' := \bar{x} + \varepsilon(\hat{x} - \bar{x}) = (1 - \varepsilon)\bar{x} + \varepsilon\hat{x}.$$



Σχήμα 11.2: Τα διανύσματα  $\bar{x}$ ,  $\hat{x}$  και  $x'$ , και το ευθύγραμμο τμήμα  $S$ .

Έχουμε ότι  $x', \bar{x} \in S$ . Αν, επιπλέον, αποδείξουμε ότι  $x' \in P$  μπορούμε να συνάγουμε ότι

$$\bar{x}, x' \in \text{aff}(P) \quad (11.2)$$

και, από την (11.2), ότι η ευθεία που φέρει το τμήμα  $S$  ανήκει στο  $\text{aff}(P)$ . Τελικά, επειδή  $\hat{x} \in S$ , λαμβάνουμε, επίσης, ότι

$$\hat{x} \in \text{aff}(P)$$

και η απόδειξη του (i) ολοκληρώνεται.

Όμως, η δική μας εργασία δεν τελείωσε — απομένει να δείξουμε ότι, όντως,  $x' \in P$ !

Για να το δείξουμε αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι

(a)  $A^-x' \leq b^-$ , και,

(b)  $A^+x' \leq b^+$ .

Με βάση την μορφή του  $x'$ , όπου  $\theta_i = \varepsilon(\hat{x}_i - \bar{x}_i)$ ,

$$x' = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 + \theta_1 \\ \bar{x}_2 + \theta_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n + \theta_n \end{bmatrix}$$

και την (11.1), παρατηρούμε ότι — για κατάλληλο  $\varepsilon$  — η απόλυτη τιμή κάθε  $\theta_i$  είναι «αρκούντως μικρή». Συνεπώς ικανοποιούνται οι συνθήκες (a) και (b) και, άρα, λαμβάνουμε ότι  $x' \in P$ .

(ii) Ισχύει ότι

$$\text{aff}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^{\#}x = b^{\#}\}$$

και, από τον ορισμό της διάστασης, ότι

$$\dim(P) = \dim(\text{aff}(P)).$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \dim(\text{aff}(P)) &= \dim(\{x \in \mathbb{R}^n \mid A^{\#}x = b^{\#}\}) \\ &\stackrel{\text{Γρ. Άλγ.}}{=} n - \text{rank}(A^{\#}). \end{aligned}$$

Το ζητούμενο συνάγεται συνδυάζοντας τις παρατιθέμενες εξισώσεις. Η απόδειξη είναι, πλέον, πλήρης. ■