**Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού**

Διάλεξη 12: 19.11.2014 — Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφέας: Μανιάτης Σπυρίδων & Μυρισιώτης Δημήτριος

## 12.1 Παραδείγματα πολυτόπων

Υπενθυμίζουμε το θεώρημα που αποδείχθηκε στο προηγούμενο μάθημα.

**Θεώρημα 12.1** *Έστω μη κενό πολύεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Ισχύουν τα παρακάτω:*

1. $\operatorname{aff}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x = b^=\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^= x \leq b^=\}$
2. $\dim(P) = n - \operatorname{rank}(A^=)$

Υπενθυμίζουμε επίσης το Προβλημα του Σακιδιου (Knapsack Problem): Δίνονται $n$ αντικείμενα, τα αντίστοιχα βάρη τους $\alpha_i \geq 0$ για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$, και σακίδιο χωρητικότητας $u \geq 0$.
Εφικτή λύση: Υποσύνολο των αντικειμένων $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ τέτοιο ώστε $\sum_{i \in I} \alpha_i \leq u$.
Μια λύση $I$ μπορεί να αναπαρασταθεί και με το χαρακτηριστικό διάνυσμα του συνόλου $I$, με συντεταγμένες:

$$x_i^I = \begin{cases} 1 & \text{αν } i \in I \\ 0 & \text{αν } i \notin I \end{cases}$$

**Παράδειγμα 12.1 (Πολύτοπο του Σακιδίου (Knapsack Polytope) )** *Το πολύτοπο για το πρόβλημα αυτό ορίζεται ως εξής:*

$$P := \operatorname{conv}\{x \in \{0,1\}^n \mid \alpha^T x \leq u\},$$

*όπου $\alpha \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ και $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Ποια είναι η διάσταση $\dim(P)$ του πολυτόπου $P$;*

Έστω $J \subseteq \{1, 2 \dots, n\}$ με $J = \{i \mid \alpha_i > u\}$. Τότε, $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j = 0 \text{ για κάθε } j \in J\}$ (γιατί είναι προφανές ότι μια εφικτή λύση δεν μπορεί να «βάζει» στο σακίδιο αντικείμενο με βάρος μεγαλύτερο της χωρητικότητας του σακιδίου).
Οι εξισώσεις $\{x_j = 0 \mid j \in J\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες άρα έχουμε τη σχέση:

$$\dim(P) \leq n - |J| \qquad (1)$$

Αν βρούμε $n - |J| + 1$ αφινικά ανεξάρτητα σημεία του $P$, θα έχουμε (εξ ορισμού της διάστασης) ότι $\dim \geq n - |J|$ και σε συνδυασμό με τη σχέση (1), ότι $\dim(P) = n - |J|$, που απαντά στο ερώτημά μας.
Για κάθε $j \notin J$ ορίζουμε ως $e^j \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα που έχει 1 στη θέση της $j$-οστής συντεταγμένης και

0 σε όλες τις υπόλοιπες. Είναι φανερό ότι $e^j \in P$ για κάθε $j \notin J$ (γιατί το να βάλουμε στο σακίδιο μόνο ένα αντικείμενο του οποίου το βάρος δεν ξεπερνά τη χωρητικότητα του σακιδίου είναι εφικτή λύση). Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα του συνόλου $\{e^j \mid j \notin J\} \cup \{\vec{0}\} \subseteq P$ (ελέγξτε ότι το να μη βάλουμε τίποτα στο σακίδιο είναι εφικτή λύση, άρα $\vec{0} \in P$) είναι αφινικά ανεξάρτητα, καθώς τα διανύσματα του συνόλου $\{e^j - \vec{0} \mid j \notin J\} = \{e^j \mid j \notin J\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

**Παράδειγμα 12.2 (Πολύτοπο μεταθέσεων (Permutahedron) )** *Ορίζουμε το* πολύτοπο μεταθέσεων (Permutahedron) $\Pi_n \subset \mathbb{R}^n$ *ως* $\text{conv}(S_n)$*, όπου*

$$S_n = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid x \textit{ προκύπτει από μετάθεση των στοιχείων του διανύσματος } (1, 2, \ldots, n-1, n)^T\}$$

*Ποια είναι η διάσταση* $\dim(\Pi_n)$ *του πολυτόπου* $\Pi_n$*;*

Θα αποδείξουμε ότι $\dim(\Pi_n) = n - 1$.
Είναι προφανές ότι κάθε διάνυσμα $x \in S_n$ (πάντα αθροίζονται τα ίδια στοιχεία) ικανοποιεί την εξίσωση

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 + 2 + \ldots + n = \binom{n+1}{2} \qquad (2)$$

Την ίδια εξίσωση ικανοποιούν και όλα τα σημεία $x \in \Pi_n$ καθώς (εξ ορισμού) προκύπτουν ως κυρτοί συνδυασμοί των $x \in S_n$. Συνεπώς,

$$\Pi_n \subseteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = \binom{n+1}{2} \right\}$$

και άρα $\dim(\Pi_n) \leq n - 1$.
Για να δείξουμε ότι $\dim(\Pi_n) = n - 1$, αρκεί να δείξουμε ότι αν όλα τα $x \in S_n$ ικανοποιούν κάποια, αυθαίρετα επιλεγμένη, εξίσωση, τότε αυτή είναι γραμμικά εξαρτημένη από την (2). Με άλλα λόγια,

$$\alpha^T x = \beta, \quad \forall x \in S_n \quad \Longrightarrow \quad \alpha^T x = \beta \text{ πολλαπλάσιο της (2)}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, $\alpha \neq \vec{0}$, γιατί η εξίσωση $0^T x = 0$ είναι γραμμικά εξαρτημένη από την (2) (αφού το $\vec{0}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο από οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα).
Πρώτα δείχνουμε ότι αν ισχύει $\alpha^T x = \beta$ για κάθε $x \in S_n$, τότε $\alpha_i = \alpha_j$ για κάθε $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Αποδεικνύουμε ότι $\alpha_1 = \alpha_2$ και οι υπόλοιπες ισότητες δείχνονται με τον ίδιο τρόπο. Από την υπόθεση μας (ότι $\alpha^T x = \beta$ για κάθε $x \in S_n$), έχουμε ότι:

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 3 + \ldots + \alpha_n \cdot n = \beta \qquad (\text{εδώ έχουμε } x = (1, 2, \ldots, n)^T \in \Pi_n)$$
$$\alpha_1 \cdot 2 + \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 3 + \ldots + \alpha_n \cdot n = \beta \qquad (\text{εδώ έχουμε } x = (2, 1, \ldots, n)^T \in \Pi_n)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, παίρνουμε:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2$$

Συνεπώς, υπάρχει $\lambda \neq 0$ τέτοιο ώστε

$$\lambda x = \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{\beta}{\lambda}$$

και λόγω της (2), $\frac{\beta}{\lambda} = \binom{n+1}{2}$, άρα η τυχαία εξίσωση που θεωρήσαμε είναι πολλαπλάσιο της (2) (άρα γραμμικά εξαρτημένη από την (2)).
Άρα η (2) είναι η μοναδική (εννοώντας ότι οποιαδήποτε άλλη είναι γραμμικά εξαρτημένη από αυτήν) ισότητα (άμεση ή έμμεση) και από το θεώρημα 12.1 παίρνουμε ότι $\dim(\Pi_n) = n - 1$, που είναι αυτό που θέλαμε.

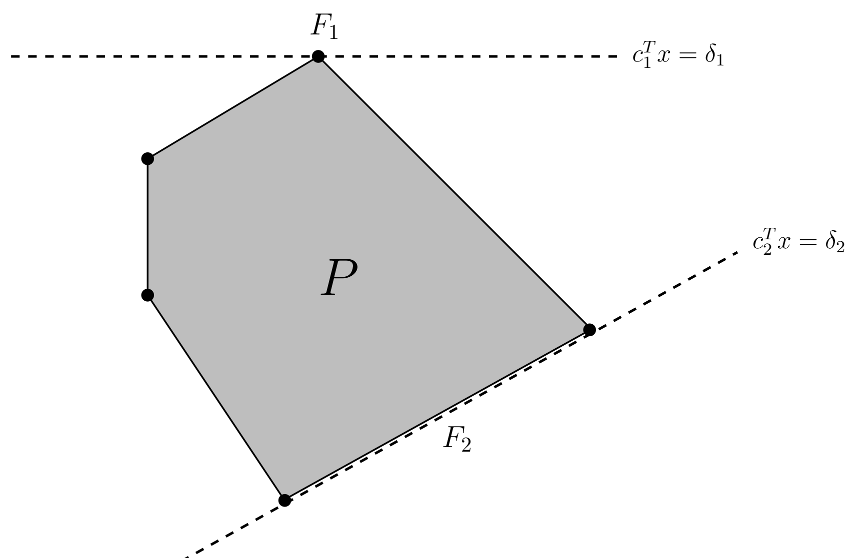
## 12.2 Όψεις και έδρες πολυέδρων

**Ορισμός 12.1** *Έστω πολύεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Καλούμε* όψη (face) *του $P$ κάθε σύνολο της μορφής*

$$F := P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = \delta\},$$

*όπου $c^T x \leq \delta$ έγκυρη ανισότητα για το $P$. Τότε λέμε ότι η ανισότητα $c^T x \leq \delta$* ορίζει *την όψη $F$.*
*Αν $c \neq \vec{0}$, τότε το υπερεπίπεδο $\{x \mid c^T x = \delta\}$ καλείται* υπερεπίπεδο στήριξης (supporting hyperplane).

**Παρατήρηση 12.1** *Για ένα πολύεδρο $P$, τα σύνολα $\emptyset$ και $P$ είναι πάντα όψεις του, που ορίζονται από τις ανισότητες (ελέξτε ότι είναι έγκυρες για το $P$) $0 \leq 1$ και $0 \leq 0$, αντίστοιχα. Η ύπαρξη αυτών των δυο «τετριμμένων» όψεων οδηγεί στον παρακάτω ορισμό.*




Σχήμα 12.1: Η όψη $F_1$ αντιστοιχεί σε κορυφή και η $F_2$ σε ακμή. Εδώ έχουμε συνολικά 12 όψεις, εκ των οποίων 10 είναι γνήσιες (5 αντιστοιχούν σε κορυφή και 5 σε ακμή).

**Ορισμός 12.2** *Έστω πολύεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Μια όψη $F$ του $P$ καλείται* γνήσια (proper) *αν $F \notin \{\emptyset, P\}$.*
*Οι μεγιστικές (ως προς τη σχέση του περιέχεσθαι $\subseteq$) και γνήσιες όψεις του $P$ καλούνται* έδρες (facets) *του $P$. Μια έγκυρη ανισότητα που ορίζει έδρα καλείται* εδραία ανισότητα (facet-defining inequality).
*Ισχύει ότι για κάθε όψη $F$ του $P$, υπάρχει έδρα $f$ του $P$ τέτοια ώστε $F \subseteq f \subset P$ (παρατηρήστε ότι η έδρα δεν είναι το ίδιο το πολύεδρο).*

Το επόμενο θεώρημα κάνει εμφανή τη σχέση των όψεων ενός πολυέδρου με τις έγκυρες ανισότητες που τις ορίζουν. Συγκεκριμένα, κάθε όψη $F$ του πολυέδρου $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ αντιστοιχίζεται σε ένα υποσύνολο των γραμμών του $A$, που δηλώνει τις ισότητες που ικανοποιούν τα σημεία της $F$.

**Θεώρημα 12.2** *Έστω μη κενό πολύεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ και $M$ το σύνολο δεικτών των γραμμών του $A$. Για $I \subseteq M$, ορίζουμε το υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$*

$$F_I := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x = b_i \text{ για κάθε } i \in I \text{ και } \alpha_i^T x \leq b_i \text{ για κάθε } i \in I \setminus M\}.$$

*Τότε το $F_I$ είναι όψη του $P$ και αντιστρόφως, αν $F$ όψη του $P$ διαφορετική από την κενή όψη $\emptyset$, τότε υπάρχει $I \subseteq M$ τέτοιο ώστε $F = F_I$.*

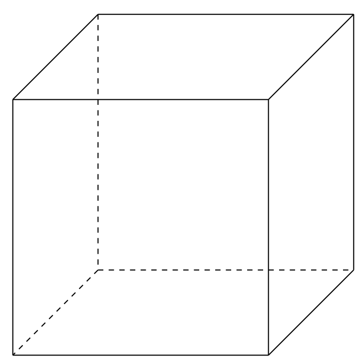
**Απόδειξη:** Ορίζουμε διάνυσμα $u$ ως εξής:

$$u_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } i \in I \\ 0 & \text{αν } i \in M \setminus I \end{cases}$$

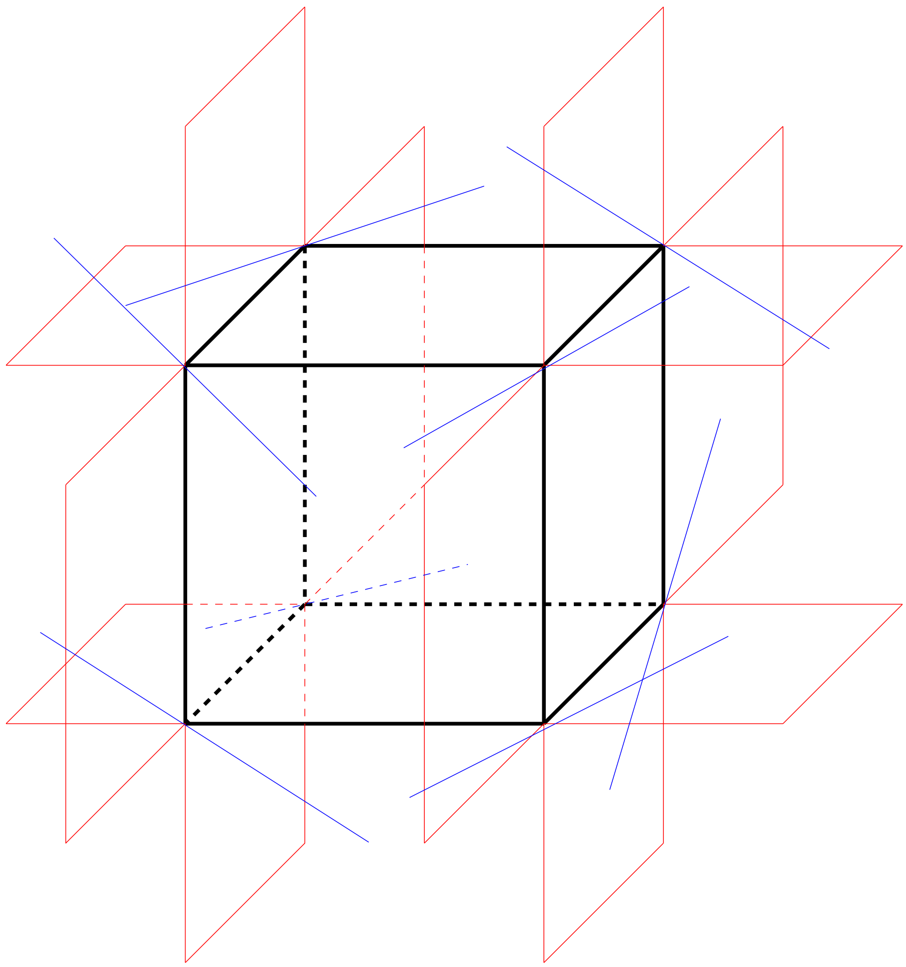
Ορίζουμε επίσης $c = u^T A$ και $\delta = u^T b$. Τότε η ανισότητα $c^T x \leq \delta$ είναι έγκυρη για το $P$. Επίσης για κάθε $x \in P$ έχουμε ότι $c^T x = \delta$ αν και μόνο αν $\alpha_i^T x = b_i$ για κάθε $i \in I$ (από τον ορισμό των $c$ και $\delta$). Δηλαδή, $F_I = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = \delta\}$ και άρα $F_I$ όψη του $P$.

Για το αντίστροφο, έστω το μη κενό $F = \{x \in P \mid c^T x = \delta\}$ που ορίζεται από την έγκυρη ανισότητα $c^T x \leq \delta$. Ισοδύναμα, το $F$ είναι το σύνολο των βέλτιστων λύσεων για το γραμμικό πρόγραμμα (LP) $\max\{c^T x \mid x \in P\}$.
Ορίζουμε ως $D$ το σύνολο των βέλτιστων λύσεων του δυϊκού του (LP), δηλαδή του γραμμικού προγράμματος $\min\{u^T b \mid u^T A = c^T,\ u \geq 0\}$.
Ορίζουμε σύνολο $I \subseteq M$ με $I = \{i \in M \mid u_i > 0 \text{ για κάποιο } i \in D\}$. Από συμπληρωματική χαλαρότητα (complementary slackness), έχουμε ότι για κάθε $x \in F$ ισχύει ότι $\alpha_i^T x = b_i$, $\forall i \in I$. Επομένως $F = F_I$ για το $I$ που ορίσαμε.

∎



Σχήμα 12.2: Ο γνωστός (τρισδιάστατος) κύβος έχει συνολικά 28 όψεις (2 τετριμμένες + 8 κορυφές + 12 ακμές + 6 έδρες), εκ των οποίων οι 6 είναι έδρες.



Σχήμα 12.3: Ο κύβος του προηγούμενου σχήματος μαζί με τα υπερεπίπεδα που ορίζουν τις όψεις του (οι μπλε γραμμές που ορίζουν τις όψεις διάστασης 0, ή κορυφές του κύβου, αναπαριστούν υπερεπίπεδα κάθετα στην επιφάνεια του «χαρτιού»).