Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 13: 02 & 03 .12.2014 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Αλέξανδρος Αγγελόπουλος & Ιωάννης Ψαρρός

13.1 Όψεις και έδρες πολυέδρων (συνέχεια)

Πρόταση 13.1 *Έστω P πολύεδρο. Τότε:*

(i) *Ο αριθμός των όψεων του P είναι πεπερασμένος.*

(ii) *Κάθε όψη F του P είναι πολύεδρο.*

(iii) *Η τομή όψεων του P είναι όψη.*

(iv) *Έστω F όψη του P. Οι όψεις του F είναι ακριβώς οι όψεις του P που περιέχονται στο F.*

Απόδειξη: Εύκολη, από εφαρμογές του Θεωρήματος 12.2. ∎

Πόρισμα 13.1 *Αν P πολύεδρο και F μία γνήσια όψη του, τότε:*

(i) $\mathrm{lin}(F) = \mathrm{lin}(P)$

(ii) $\dim(F) < \dim(P)$

Απόδειξη: Θεωρούμε $P = \{x \mid Ax \leq b\}$.

(i) Γνωρίζουμε ότι $\mathrm{lin}(P) = \{y \mid Ay = 0\}$ και από το Θεώρημα 12.2 ότι υπάρχει υποσύνολο $I \subseteq M$ των ανισοτήτων τέτοιο ώστε

$$F = \{x \mid A^I x = b^I,\ A^{M\setminus I} x \leq b^{M\setminus I}\} \tag{13.1}$$

Το F όμως είναι πολύεδρο και $\mathrm{lin}(F) = \{y \mid A^I y = 0,\ A^{M\setminus I} y = 0\} = \{y \mid Ay = 0\} = \mathrm{lin}(P)$.

(ii) Από Πρόταση 11.1, υπάρχει $\bar{x} \in P$ τ.ω. $A^{=}\bar{x} = b^{=}$ και $A^{+}\bar{x} < b^{+}$. Λόγω της (13.1) έχουμε:

$$\mathrm{aff}(F) = \{x \mid A^I x = b^I\},\ \mathrm{aff}(P) = \{x \mid A^{=} x = b^{=}\}$$

και $F \subset P \implies I \supset I^{=}$, διότι εάν $I = I^{=}$ τότε $F = P$ και αν επιλέγαμε $I \subset I^{=}$ οι υποδηλούμενες ισότητες των δεικτών $I^{=} \setminus I$ ανήκουν στο $A^{M\setminus I}$ και άρα και πάλι $F = P$.

Εύκολα παρατηρούμε ότι $\bar{x} \notin \mathrm{aff}(F)$: αν ήταν $\bar{x} \in F$ τότε και $I \subseteq I^{=}$, άτοπο. Συνεπώς το $\mathrm{aff}(P)$ περιέχει σημείο το οποίο δεν περιέχεται στο $\mathrm{aff}(F)$ ενώ $\mathrm{aff}(F) \subseteq \mathrm{aff}(P)$ και τελικά $\dim(F) < \dim(P)$.

∎

Ορισμός 13.1 *Μια ανισότητα $c^T x \leq \delta$ που ανήκει στο $Ax \leq b$ καλείται* πλεονάζουσα (redundant) *αν είναι έγκυρη ανισότητα του $A_{-c}x \leq b_{-c}$, όπου με A_{-c} συμβολίζουμε τον πίνακα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τον A την γραμμή που αντιστοιχεί στον περιορισμό $c^T x \leq \delta$.*
Οι ανισότητες του $Ax \leq b$ οι οποίες δεν είναι πλεονάζουσες, καλούνται μη πλεονάζουσες (irredundant).

Ορισμός 13.2 *Έστω $P \neq \emptyset$ και $P = \{x \mid Ax \leq b\}$. Το σύστημα $Ax \leq b$ καλείται* ελαχιστική αναπαράσταση *του P αν δεν περιέχει καμία πλεονάζουσα ανισότητα.*

Θα αποδείξουμε εδώ δύο λήμματα τα οποία βοηθούν στην απόδειξη του Θεωρήματος 13.1 που διατυπώνεται στη συνέχεια.

Λήμμα 13.1 *Έστω πολύεδρο $P = \{x \mid Ax \leq b\} \neq \emptyset$ και ότι $\forall i \in I^+$ το $a_i^T x \leq b_i$ είναι μη πλεονάζουσα ανισότητα. Τότε για κάθε i, υπάρχει $x^i \in P$ τ.ω. $a_i^T x^i = b_i$ και $a_j^T x^i < b_j$, $\forall j \in I^+ \setminus \{i\}$.*

Απόδειξη: Έστω $i \in I^+$. Ορίζουμε (όπως και πριν) το υποσύστημα $A^+_{-i}x \leq b^+_{-i}$. Επειδή η ανισότητα $a_i^T x \leq b$ είναι μη πλεονάζουσα, το σύστημα:

$$\begin{aligned} A^= x &= b^= \\ A^+_{-i}x &\leq b^+_{-i} \\ a_i^T x &> b_i \end{aligned}$$

έχει λύση (έστω $\bar{x}^i$): εάν ήταν αδύνατο, τότε για κάθε λύση του $\left\{\begin{aligned} A^= x &= b^= \\ A^+_{-i}x &\leq b^+_{-i}\end{aligned}\right\}$ έπεται ότι $a_i^T x \leq b_i$, άρα η τελευταία είναι πλεονάζουσα ανισότητα, άτοπο.

Επίσης, από την Πρόταση 11.1 υπάρχει $\bar{x} \in P$ τ.ω. $A^+\bar{x} < b^+$. Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα $\{\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\bar{x}^i,\ \lambda \in [0,1]\}$ και με τη βοήθεια του Σχήματος 13.1 αποδεικνύουμε την ύπαρξη του x^i που ικανοποιεί το ζητούμενο.

∎

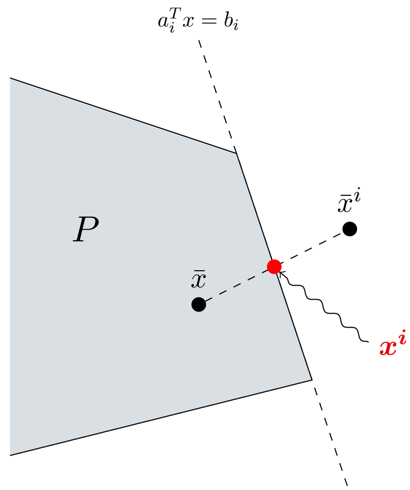
Λήμμα 13.2 *Έστω P μη κενό πολύεδρο και $Ax \leq b$ ελαχιστική αναπαράσταση αυτού. Για κάθε $i \in I^+$, η όψη $F = \{x \in P \mid a_i^T x = b_i\}$ έχει διάσταση $\dim(P) - 1$.*

Απόδειξη: Αφού $i \in I^+$ τότε και $F \subset P$, ειδάλλως η $a_i^T x = b_i$ θα ήταν υποδηλούμενη ισότητα. Το Πόρισμα 13.1 μας δίνει ότι $\dim(F) \leq \dim(P) - 1$.

Επίσης, για το σύνολο των (υποδηλουμένων) ισοτήτων του F έχουμε $I_F = I^= \cup \{i\} \supset I^=$ (αν ίσχυε η ισότητα τότε $i \in I^=$, άτοπο από υπόθεση). Έτσι έχουμε $\operatorname{rank}(\begin{bmatrix} A^= \\ a_i^T \end{bmatrix}) \leq \operatorname{rank}(A^=) + 1$ και συνεπώς, από Θεώρημα 11.1 $\dim(F) \geq \dim(P) - 1$.

Τελικά προκύπτει το ζητούμενο $\dim(F) = \dim(P) - 1$.

∎



Σχήμα 13.1: Λήμμα 13.1. Κοντά σε μια όψη του πολυέδρου.

Θεώρημα 13.1 *Έστω P πολύεδρο και $P \neq \emptyset$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) Η όψη F του P είναι έδρα $\Leftrightarrow F \neq \emptyset$ και $\dim(F) = \dim(P) - 1$.

(ii) Για κάθε έδρα F του P, κάθε σύστημα ανισοτήτων που αναπαριστά το P περιέχει μια ανισότητα που ορίζει την F.

(iii) Αν $Ax \leq b$ ελαχιστική αναπαράσταση του P, τότε κάθε ανισότητα του $A^+x \leq b^+$ είναι εδραία (facet-defining).

Απόδειξη:

(ii) Έχουμε $P = \{x \mid Ax \leq b\}$. Έστω F μια έδρα του P. Επειδή F όψη, από Θεώρημα 12.2 έχουμε ότι $\exists I \subseteq M$ (M σύνολο δεικτών των ανισοτήτων $Ax \leq b$), έτσι ώστε $F = \{x \in P \mid a_i^T x = b_i, \forall i \in I\}$. Αφού $F \neq P$, όπως είδαμε και στην απόδειξη του Πορίσματος 13.1, προκύπτει ότι $I \setminus I^= \neq \emptyset$. Έστω $k \in I \setminus I^=$, $F' = \{x \in P \mid a_k^T x = b_k\}$, $F \subseteq F' \subset P$. Αφού F μεγιστική όψη, $F = F'$. Επομένως η F ορίζεται από την ανισότητα $a_k^T x \leq b_k$.

(i) ($\Leftarrow$). Έστω $F \neq \emptyset$ όψη του P και $\dim(F) = \dim(P) - 1$. Προς άτοπο, έστω F' γνήσια όψη του P τ.ω. $F \subset F' \subset P$. Από την Πρόταση 13.1 (iii) έχουμε ότι η F είναι γνήσια όψη της F'. Και από το Πόρισμα 13.1 (ii) έπεται ότι $\dim(F) < \dim(F') < \dim(P)$.

($\Rightarrow$). Έστω F έδρα του P, $Ax \leq b$ ελαχιστική αναπαράσταση του P. Από (ii) υπάρχει $i \in I^+$ τ.ω. $F = \{x \in P \mid a_i^T x = b_i\}$. Από Λήμμα 13.2, $\dim(F) = \dim(P) - 1$.

(iii) Άμεση συνέπεια του (i) και του Λήμματος 13.2.

∎

Πόρισμα 13.2 *Έστω πολύεδρο $P \neq \emptyset$ και $Ax \leq b$ ελαχιστική αναπαράσταση του P. Το P έχει $|I^+|$ διακεκριμένες έδρες, τις $F_i = \{x \in P \mid a_i^T x = b_i\}$, $\forall i \in I^+$.*

Απόδειξη: Από Θεώρημα 13.1, για κάθε $i \in I^+$ το F_i είναι έδρα του P και αυτές είναι όλες οι έδρες του P. Επίσης, $\forall i, j \in I^+$, $i \neq j$ ισχύει ότι $F_i \neq F_j$ καθώς από το Λήμμα 13.1 υπάρχουν x^i, x^j τ.ω. $x^i \in F_i \setminus F_j$, $x^j \in F_j \setminus F_i$.

∎

Παράδειγμα 13.1 *Έστω γράφημα $G = (V, E)$, με $|V| = n$. Θεωρούμε το πρόβλημα της εύρεσης ενός ανεξάρτητου συνόλου (independent set ή stable set).*

Ορίζουμε $\mathrm{STAB}(G) = \mathrm{conv}\{x \in \{0,1\}^n \mid x$ χαρακτηριστικό διάνυσμα ανεξάρτητου συνόλου στο $G\}$. Προφανώς, τα διανύσματα $e_1, e_2, ..., e_n, \vec{0}$ ανήκουν στο $\mathrm{STAB}(G)$. Όμως είναι και αφινικά ανεξάρτητα, γεγονός το οποίο συνεπάγεται ότι:

$$\dim(\mathrm{STAB}(G)) = n + 1 - 1 = n.$$

Έστω, τώρα, K μια μεγιστική κλίκα στο G. Η ανισότητα

$$\sum_{v \in K} x_v \leq 1$$

είναι έγκυρη για το $\mathrm{STAB}(G)$ (το πολύ μια κορυφή από κάθε μεγιστική κλίκα μπορεί να ανήκει στο ανεξάρτητο σύνολο). Θα δείξουμε ότι είναι και εδραία ανισότητα.

Ορίζουμε $F_k = \{x \in \mathrm{STAB}(G) \mid \sum_{v \in K} = 1\}$. Θα δείξουμε ότι $\dim(F_k) = n - 1$, άρα F_k έδρα.

Κάθε $v \in V \setminus K$ περιέχεται σε ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους 2, με κάποια από τις κορυφές του K. Συνολικά έχουμε $|V \setminus K|$ τέτοια ανεξάρτητα σύνολα.

Επίσης κάθε $w \in K$ ορίζει $\{w\}$ ανεξάρτητο σύνολο. Συνολικά έχουμε $|K|$ τέτοια ανεξάρτητα σύνολα.

Ορίσαμε $|V| = n$ σημεία του $\mathrm{STAB}(G)$ που είναι γραμμικά ανεξάρτητα άρα και αφινικά ανεξάρτητα. Άρα $\dim(F_k) \geq n - 1$. Επειδή $F_k \subset \mathrm{STAB}(G)$ (και F_k γνήσια όψη) έχουμε $\dim(F_k) = n - 1$.

Πρόταση 13.2 *Αν K μη μεγιστική κλίκα τότε $\sum_{v \in K} x_v \leq 1$ δεν είναι εδραία.*

Η απόδειξη της Πρότασης 13.2 βρίσκεται στις σημειώσεις της επόμενης διάλεξης.