Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 15: 9.12.2014 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Λουκάς Κάβουρας & Στρατής Σκουλάκης

15.1 Πολύτοπο Ανεξάρτητου Συνόλου

Έστω γράφημα $G(V,E)$, με $|V| = n$. Στην προηγούμενη διάλεξη, ορίσαμε το πολύτοπο ανεξάρτητου συνόλου ως STAB(G)=conv($\{x \in \{0,1\}^n$, όπου x χαρακτηριστικό διάνυσμα ανεξάρτητου συνόλου στο G $\}$) και αποδείξαμε ότι $\dim(\text{STAB(G)}) = n$.

Παρατήρηση 15.1 *Υπενθυμίζουμε ότι η* $\sum_{v\in K} x_v \leq 1$, *όπου* K *μεγιστική κλίκα, είναι εδραία ανισότητα του* STAB(G).

Παρατήρηση 15.2 *Αν η* K *είναι μη μεγιστική κλίκα, η* $\sum_{v\in K} x_v \leq 1$ *δεν είναι εδραία. Αφού η* K *είναι μη μεγιστική, υπάρχει* $K' \supset K$, *η οποία είναι μεγιστική. Επομένως, για τα σύνολα* $F_k = \{x \in \text{STAB(G)} \mid \sum_{v\in K} x_v = 1\}$ *και* $F_{k'} = \{x \in \text{STAB(G)} \mid \sum_{v\in K'} x_v = 1\}$, *θα ισχύει* $F_k \subset F_{k'}$. *Δηλαδή, η όψη* F_k *δεν είναι έδρα.*

Παρατήρηση 15.3 *Οποιαδήποτε ακμή* $\{u,v\} \in E$ *ικανοποιεί την έγκυρη ανισότητα* $x_u + x_v \leq 1$, *επειδή μόνο η* u *ή η* v *θα είναι στο ανεξάρτητο σύνολο. Οπότε αν η ακμή δεν περιέχεται σε τρίγωνο, τότε η ανισότητα είναι εδραία και αντίστροφα.*

Παρατήρηση 15.4 *Έστω οι ανισότητες* $x_u \geq 0$, $\forall u \in V$ *με αντίστοιχη όψη* $F_u = \{x \in \text{STAB(G)} \mid x_u = 0\}$. *Τότε* $\vec{0} \in F_u$ *και* $\forall i \in V$, $i \neq u$ *το διάνυσμα* $\vec{e_i} \in F_u$. *Επομένως n αφινικά ανεξάρτητα διανύσματα ανήκουν στην όψη* F_u, *δηλαδή* $\dim(\mathrm{F_u}) = n-1$. *Άρα, η* F_u *είναι έδρα για κάθε* $u \in V$. *Τα γραφήματα για τα οποία* $\text{STAB(G)} = \{x \in \mathrm{R}^n \mid x_u \geq 0,\ \forall u \in V$ *και* $\sum_{v\in K} x_v \leq 1$, *για κάθε μεγιστική κλίκα* $K\}$ *είναι τα τέλεια γραφήματα (perfect graphs).*

15.2 Ελαχιστικές αναπαραστάσεις πολυέδρων

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι οι ελαχιστικές αναπαραστάσεις ενός πολυέδρου είναι ουσιαστικά μοναδικές.

Θεώρημα 15.1 *Έστω πολύεδρο* $P \neq \varnothing$ *και έστω* $Ax \leq b$, $Cx \leq d$ *δύο ελαχιστικές αναπαραστάσεις του* P.

1. *Τα συστήματα* $A^= x = b^=$ *και* $C^= x = d^=$ *έχουν τον ίδιο αριθμό εξισώσεων και κάθε εξίσωση* $c_i^T x = d_i$ *του* $C^= x = d^=$ *είναι της μορφής* $(u^T A^=)x = u^T b$, *για κάποιο διάνυσμα* u.

2. *Τα συστήματα $A^+x \leq b^+$ και $C^+x \leq d^+$ έχουν ίδιο αριθμό ανισώσεων και μετά από κατάλληλη μετάθεση των δεικτών, κάθε ανισότητα $c_i^T x \leq d_i$ του $C^+x \leq d^+$ είναι της μορφής $(\lambda a_i^T + u^T A^=)x \leq (\lambda b_i + u^T b^=)$, για βαθμωτό $\lambda > 0$ και διάνυσμα u, όπου $a_i^T x \leq b_i$ είναι ανισότητα του $A^+x \leq b^+$.*

Απόδειξη:

1. Εφόσον τα συστήματα ανισοτήτων $Ax \leq b$ και $Cx \leq d$ αναπαριστούν το ίδιο πολύτοπο, $\text{aff(P)} = \{x \in \mathrm{R}^n \mid A^=x = b^=\} = \{x \in \mathrm{R}^n \mid C^=x = d^=\}$. Από γραμμική άλγεβρα, δύο συστήματα εξισώσεων ορίζουν τον ίδιο αφινικό υπόχωρο ανν κάθε εξίσωση του ενός είναι γραμμικός συνδυασμός των εξισώσεων του άλλου. Επιπλέον, αφού είναι ελαχιστικές αναπαραστάσεις, κανένα δεν περιέχει πλεονάζουσες εξισώσεις άρα και στα δύο συστήματα ο αριθμός των εξισώσεων είναι $n - \dim(\text{P})$.

2. Υποθέτουμε ότι το P έχει k διακεκριμένες έδρες. Από το Πόρισμα 13.2, $|I_A^+| = |I_C^+| = k$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, τα $a_i^T x \leq b_i,\ c_i^T x \leq d_i,\ 1 \leq i \leq k$ ορίζουν την ίδια έδρα F_i, όπου $F_i = \{x \in P \mid a_i^T x = b_i\} = \{x \in P \mid c_i^T x = d_i\}$.
Για $i = 1, .., k$, η $c_i^T x \leq d_i$ είναι έγκυρη για το $P = \{x \in \mathrm{R}^n \mid A^=x = b^=,\ A^+x \leq b^+\}$.
Από το Πόρισμα 8.1, υπάρχουν $\lambda_1, ..., \lambda_k \geq 0$ και διάνυσμα u τ.ώ.
$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j^T + u^T A^= = c_i^T,\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_j + u^T b^= \leq d_i$ **(1)**.
Από το Λήμμα 13.1 , $\exists\ x^i \in F_i$ τ.ώ. $a_j^T x^i < b_j,\ \forall j \in I^+\backslash\{i\}$ και $x^i \in F_i \Rightarrow c_i^T x^i = d_i$
Άρα $d_i = c_i^T x^i \overset{(\mathbf{1})}{=} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j^T x^i + u^T A^= x^i \leq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_j + u^T b^= \overset{(\mathbf{1})}{\leq} d_i$.
Η ισότητα ισχύει ανν $\lambda_j = 0,\ \forall j \in I^+\backslash\{i\}$. Άρα, η **(1)** απλοποιείται σε $\lambda_i a_i^T + u^T A^= = c_i^T,\ \lambda_i b_i + u^T b^= = d_i$. Για να δείξουμε ότι $\lambda = \lambda_i > 0$, έστω ένα σημείο $\bar{x} \in P\backslash F_i$. Τότε $c_i^T \bar{x} < d_i \Rightarrow \lambda(b_i - a_i^T \bar{x}) + u(b^= - A^= \bar{x}) = \lambda(b_i - a_i^T \bar{x}) > 0$ και $b_i - a_i > 0$, άρα $\lambda > 0$.

∎

Το Πόρισμα 15.1 προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 15.1, αφού τα πολύεδρα πλήρους διάστασης δεν έχουν υποδηλούμενες ισότητες στην αναπαράστασή τους.

Πόρισμα 15.1 *Έστω το πολύεδρο $P = \{x \in \mathrm{R}^n \mid Ax \leq b\}$, όπου P είναι πλήρους διάστασης και έστω $Ax \leq b$ ελαχιστική αναπαράσταση του P. Κάθε άλλη ελαχιστική αναπαράσταση του P προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τις ανισότητες του $Ax \leq b$ με θετικούς αριθμούς.*

Πόρισμα 15.2 *Έστω το πολύεδρο $P = \{x \in \mathrm{R}^n \mid A'x = b'\ ,\ A''x \leq b''\} \neq \varnothing$. Το σύστημα που ορίζει το P είναι ελαχιστικό ανν οι γραμμές του A' είναι γραμμικά ανεξάρτητες,* rank*(A')=* $n - \dim(\text{P})$ *και για κάθε γραμμή του A'', η ανίσωση $(a_i'')^T x \leq b_i''$ ορίζει μία διακεκριμένη έδρα του P.*