Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 16: 10.12.2014 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Λουκάς Κάβουρας & Στρατής Σκουλάκης

16.1 Πολύεδρο μεταθέσεων

Θυμίζουμε τον ορισμό του πολυέδρου μεταθέσεων (Permutahedron) ως Π_n=conv(S_n), όπου S_n οι μεταθέσεις του $[1, 2, \ldots, n]^T$.

Παρατήρηση 16.1 *Η εξίσωση* $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \binom{n+1}{2}$, $\forall x \in \Pi_n$ *είναι έγκυρη για το* Π_n.

Απόδειξη: *Παράδειγμα 12.2* ∎

Έστω η ανισότητα $\sum\limits_{i\in K} x_i \geq 1 + 2 + \ldots + k = \binom{k+1}{2}$, $\forall K \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, $|K| = k$ **(1)**.
Η **(1)** ισχύει με ισότητα αν $\{x_i \mid i \in K\} = \{1, 2, \ldots, k\}$ και προφανώς είναι έγκυρη ανισότητα. Έστω $F_k = \{x \in \Pi_n \mid \sum\limits_{i\in K} x_i = \binom{k+1}{2}\}$ όψη του Π_n. Θα δείξουμε ότι η F_k είναι έδρα.

Η F_k είναι γνήσια όψη και υποθέτουμε ότι δεν είναι έδρα. Άρα υπάρχει έδρα που την περιέχει, δηλαδή υπάρχει εδραία ανισότητα του Π_n , $a^T x \geq b$ τ.ώ. $a^T x = b$, $\forall x \in F_k \bigcap S_n$.
Θα δείξουμε ότι η ανισότητα **(1)** ορίζει την ίδια όψη που ορίζει η ανισότητα $a^T x \geq b$, το οποίο συνεπάγεται ότι η F_k είναι έδρα.

Ισχυρισμός 1 Αν $i, j \in K$ ή $i, j \in \{1, \ldots, n\}\backslash K$ τότε $a_i = a_j$.

Απόδειξη: Έστω $i, j \in K$, $i \neq j$ και $\bar{x} \in F_k \bigcap S_n$. Από το διάνυσμα $\bar{x}$ παίρνουμε το διάνυσμα $\tilde{x}$ με τη μετάθεση $\bar{x}_i \leftrightarrow \bar{x}_j$. Άρα το $\tilde{x} \in F_k$ και $a^T \tilde{x} = b$. Επίσης $a^T x - a^T \tilde{x} = 0$ άρα $a_i(\bar{x}_i - \tilde{x}_i) + a_j(\bar{x}_j - \tilde{x}_j)$ δηλαδή $(a_i - a_j)(\bar{x}_i - \bar{x}_j) = 0 \Rightarrow a_i = a_j$, αφού $\bar{x}_i \neq \bar{x}_j$. Παρόμοια αποδεικνύεται και η περίπτωση $i, j \notin K$. ∎

Λόγω του Ισχυρισμού 1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a^T x = \lambda \sum\limits_{i\in K} x_i + \lambda' \sum\limits_{i\notin K} x_i$.

Ισχυρισμός 2 $\lambda \geq \lambda'$

Απόδειξη: Παίρνουμε το διάνυσμα $\tilde{x}$ από το διάνυσμα $\bar{x}$ με τη μετάθεση $\bar{x}_i,\ i \in K \leftrightarrow \bar{x}_j,\ j \notin K$
Από το σύστημα $\begin{cases} a^T \bar{x} = b \\ a^T \tilde{x} \geq b \end{cases}$ με αντικατάσταση του b στην ανισότητα παίρνουμε $a^T \tilde{x} - a^T \bar{x} \geq 0 \Rightarrow$ $(\lambda - \lambda')(\bar{x}_j - \bar{x}_i) \geq 0$. Επειδή $\bar{x}_j - \bar{x}_i > 0$ από κατασκευή, ισχύει και $\lambda - \lambda' \geq 0$. ∎

Επομένως η ανισότητα $a^T x \geq b$ προκύπτει ως το άθροισμα της εξίσωσης $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \binom{n+1}{2}$ πολλαπλασιασμένης με λ' και της ανίσωσης **(1)** πολλαπλασιασμένης με $\lambda - \lambda'$. Δηλαδή η **(1)** και η $a^T x = b$ ορίζουν την ίδια όψη.

16.2 Ελαχιστικές όψεις

Έστω ένα πολύεδρο $P \subseteq \mathrm{R}^n$, $P \neq \emptyset$. Η $F \subseteq \mathrm{R}^n$ καλείται ελαχιστική όψη του P, αν F είναι όψη του P που δεν περιέχει γνήσια όψη και $F \neq \emptyset$.

Θεώρημα 16.1 (Hoffman-Kruskal) *Κάθε ελαχιστική όψη του μη κενού πολυέδρου P είναι μετατόπιση (translate) του* $\mathrm{lin}(P)$.

Απόδειξη: Έστω η ελαχιστική όψη $F \neq \emptyset$. Η F ως μη κενό πολύεδρο δεν έχει γνήσια όψη ανν δεν έχει έδρες. Λόγω του Πορίσματος 13.2, η F δεν έχει έδρες ανν η F είναι αφινικός χώρος. Τελικά η F είναι ελαχιστική όψη του P ανν η F είναι αφινικός χώρος, το οποίο σημαίνει ότι η $F = \{v\} + \mathrm{lin}(F)$, για κάποιο διάνυσμα $v \in F$. Από Πόρισμα 13.1, $\mathrm{lin}(F) = \mathrm{lin}(P)$. ∎

Στα σχήματα 16.1, 16.2 και 16.3, έχουμε παραδείγματα του Θεωρήματος Hoffman-Kruskal στο επίπεδο.

Παρατήρηση 16.2 *Αν $P = \{x \in \mathrm{R}^n \mid Ax \leq b\}$ πολύεδρο και F ελαχιστική όψη του, τότε* $\dim(F) = \dim(\mathrm{lin}(P)) = \dim(\{x \mid Ax = 0\}) = n - \mathrm{rank}(A)$.

Παρατήρηση 16.3 *Κάθε πολυεδρικός κώνος έχει μία μοναδική ελαχιστική όψη, η οποία είναι το lineality space του.*

Πόρισμα 16.1 *Έστω $P = \{x \in \mathrm{R}^n \mid Ax \leq b\}$ πολύεδρο, η όψη $F \neq \emptyset$ του P είναι ελαχιστική ανν $F = \{x \in \mathrm{R}^n \mid A'x = b'\}$ για κάποιο υποσύστημα $A'x \leq b'$ του $Ax \leq b$ τ.ώ.* $\mathrm{rank}(A') = \mathrm{rank}(A)$.

Απόδειξη: ($\Leftarrow$) Έστω F μη κενή όψη του P με $F = \{x \in \mathrm{R}^n \mid A'x = b'\}$, όπου το σύστημα $A'x \leq b'$ αποτελείται από κάποιες από τις ανισώσεις του $Ax \leq b$ τ.ώ. το $\mathrm{rank}(A') = \mathrm{rank}(\mathrm{A})$. Τότε, η F είναι αφινικός χώρος, επομένως δεν περιέχει γνήσια όψη. Άρα, η F είναι ελαχιστική όψη του P.

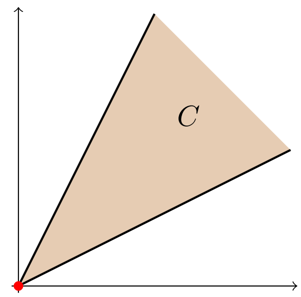
($\Rightarrow$)Έστω $A'x \leq b'$ να είναι το σύστημα όλων των ανισοτήτων του $Ax \leq b$, οι οποίες ικανοποιούνται με ισότητα από κάθε σημείο της F, και έστω $A''x \leq b''$ το σύστημα με τις υπόλοιπες ανισότητες του $Ax \leq b$. Από Θεώρημα 12.2, $F = \{x \in \mathrm{R}^n \mid A'x = b',\ A''x \leq b''\}$. Αν η F είναι ελαχιστική όψη τότε είναι και αφινικός χώρος. Αφού F αφινικός χώρος, για κάθε ανίσωση $a_i^T x \leq b_i$ από το $A''x \leq b''$, θα ισχύει $a_i^T \bar{x} < b_i, \forall \bar{x} \in F$. Από Λήμμα 13.1, οι $A''x \leq b''$ είναι πλεονάζουσες ανισότητες για το πολύεδρο F. Άρα $F = \{x \in \mathrm{R}^n \mid A'x = b'\}$. Επομένως, $\dim(\mathrm{F}) = n - \mathrm{rank}(A')$. Από Παρατήρηση 16.2, $\dim(\mathrm{F}) = n - \mathrm{rank}(A) \Rightarrow \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A')$.

Ορισμός 16.1 *Εναλλακτικός ορισμός κορυφής*

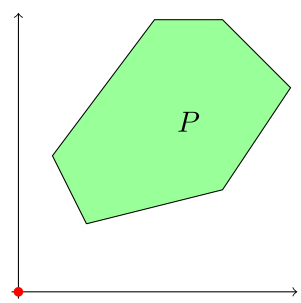
Μία όψη διάστασης 0, καλείται κορυφή του πολυέδρου P.

Παρατήρηση 16.4 *Απο Θεώρημα Hoffman-Kruskal και εναλλακτικό ορισμό κορυφής, το πολύεδρο P έχει μία κορυφή, αν έχει όψη διάστασης 0 που είναι μετατόπιση του* $\mathrm{lin}(P)$. *Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο όταν* $\mathrm{lin}(P) = \{\vec{0}\}$, *δηλαδή όταν το P είναι μυτερό.*

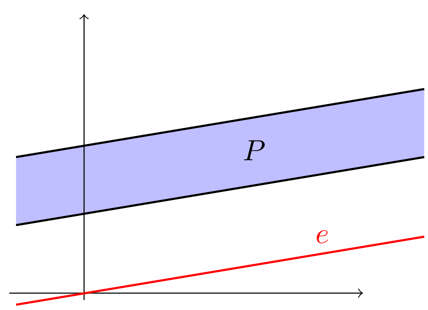
∎



Σχήμα 16.1: $\mathrm{lin}(C) = \vec{0}$



Σχήμα 16.2: $\mathrm{lin}(P) = \vec{0}$



Σχήμα 16.3: $\mathrm{lin}(P) = e$