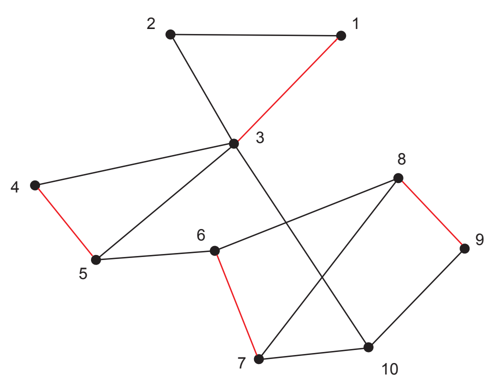
Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Διάλεξη 17: 16.12.2014 Διδάσκων: Σταύρος Κολλιόπουλος

Γραφείς: Λιβιεράτος Ιωάννης, Πετροπαναγιωτάκη Μαρία

17.1 Το πολύτοπο των ταιριασμάτων

Έστω $G = (V, E)$ μη κατευθυνόμενο γράφημα
Ταίριασμα (matching) στο G καλείται ένα $M \subseteq E$ τέτοιο ώστε για κάθε $e_1 = \{u_1, v_1\}, e_2 = \{u_2, v_2\} \in M$ να ισχύει ότι $e_1 \cap e_2 = \emptyset$.
Ένα ταίριασμα M καλείται *τέλειο (perfect matching)* αν επιπλέον ισχύει ότι $|M| = \frac{|V|}{2}$.



Σχήμα 17.1: Οι κόκκινες ακμές αποτελούν ένα (μεγιστικό) ταίριασμα του γραφήματος.

Ορίζουμε ως πολύτοπο των ταιριασμάτων το

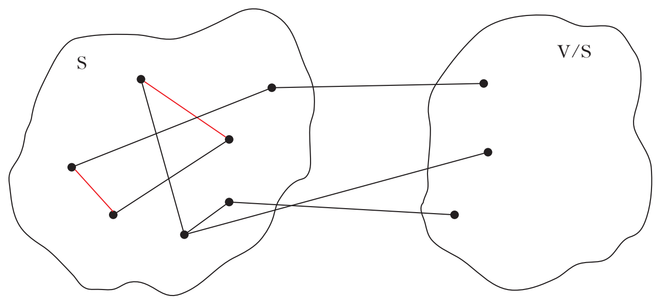
$$M(G) = \mathrm{conv}(\{x \in \{0,1\}^{|E|} \mid x \text{ χαρακτηριστικό διάνυσμα ταιριάσματος στο } G\})$$

Επίσης ορίζουμε το πολύτοπο:

$$P_E = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid \begin{array}{cc} x(\delta(v)) \leq 1 & \forall v \in V \\ x(\gamma(S)) \leq \frac{|S|-1}{2} & \forall S \subseteq V \text{τέτοιο ώστε} \, |S| \geq 3 \text{ και } |S| \text{περιττός} \\ x_e \geq 0 & \forall e \in E \end{array} \} \tag{17.1}$$

όπου
$x(E') = \sum_{e \in E'} x_e$ για κάποιο $E' \subseteq E$,
$\delta(S) = \{\{u, v\} \in E : u \in S, v \notin S\}$ και
$\gamma(S) = \{\{u, v\} \in E : u \in S \wedge v \in S\}$ για κάποιο $S \subseteq V$

Προσέξτε ότι η ανισότητα $x(\delta(S)) \geq 1 \, \forall S \subseteq V$ τέτοιο ώστε $|S| \geq 3$ και $|S|$ περιττός δεν είναι έγκυρη.



Σχήμα 17.2: Για $|S| = 7$, $x(\gamma(S)) \leq \frac{7-1}{2} = 3$

Προφανώς το πολύτοπο P_E περιλαμβάνει όλα τα πιθανά ταιριάσματα.

Πρόταση 17.1 $M(G) \subseteq P_E$

Θεώρημα 17.1 (The Matching Polytope Theorem [Edmonds 1965])

$$M(G) = P_E$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $P_E \subseteq M(G)$

Για την απόδειξη θα ακολουθήσουμε την παρακάτω μεθοδολογία:

1. **Θεώρημα 17.2** *Έστω πολύεδρο πλήρους διάστασης* $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$
   Η αναπαράσταση του P *είναι ελαχιστική αν και μόνο αν κάθε ανισότητα* $a_i^{\mathrm{T}} x \leq b_i$ *ορίζει μια διακεκριμένη έδρα του* P.
2. Έστω P πολύεδρο πλήρους διάστασης.
   Από το 1. παίρνουμε:
   $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ αν και μόνο αν
   $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ και κάθε έδρα του P αναπαριστάται στο σύστημα $Ax \leq b$.
   Αφού κάθε έδρα του P αναπαριστάται στο $Ax \leq b$ έπεται ότι το σύστημα περιέχει μια ελαχιστική αναπαράσταση του P.
3. Έστω ότι $w^{\mathrm{T}} x \leq t$ ορίζει μια έδρα F του P. Θα αποδείξουμε ότι κάποια ανισότητα του $Ax \leq b$ ορίζει επίσης την F. Τότε, από το 2, δεδομένου ότι P πλήρους διάστασης και ότι $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, θα έχουμε ότι $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$.

Πρόταση 17.2 *Το πολύτοπο* $M(G)$ *είναι πλήρους διάστασης, δηλαδή* $\dim(M(G)) = |E(G)|$

Απόδειξη: Έστω $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.
Τα $\{\chi_{e_1}, \chi_{e_2}, \ldots, \chi_{e_m}\} \in \{0,1\}^m$, δηλαδή τα χαρακτηριστικά διανύσματα των αντίστοιχων ακμών,

καθώς και το $\vec{0} \in M(G)$ αποτελούν $m+1$ το πλήθος αφινικά ανεξάρτητα διανύσματα. Επομένως $\dim(M(G)) = |E(G)|$. ∎

17.2 Απόδειξη του Θεωρήματος Edmonds

Η παρακάτω απόδειξη δόθηκε από τον Lovász το 1979.

Απόδειξη: Έστω
$$w^{\mathrm{T}} x \leq t \tag{17.2}$$

εδραία ανισότητα του $M(G)$ που ορίζει μια έδρα F και έστω M^* το σύνολο των ταιριασμάτων που ικανοποιούν την (17.2) με ισότητα.
Θα δείξουμε ότι κάποια ανισότητα $(*)$ του Edmonds επίσης ικανοποιείται με ισότητα από τα στοιχεία του M^*. Δηλαδή $F \subseteq F_*$ όπου F_* η όψη που ορίζει η $(*)$. Επειδή F έδρα, πρέπει $F = F_*$.

- **Περίπτωση 1** Έστω $w_e < 0$ για κάποιο $e \in E$.
  Τότε σε κάθε $M \in M^*$ πρέπει $x_e^M = 0$.
  Έστω $\begin{array}{l} \mathrm{x}_e^M > 0 \\ \mathrm{w}^{\mathrm{T}} x^M = t \end{array}$
  Θέτοντας $x_e := 0$
  παίρνουμε ταίριασμα M' τέτοιο ώστε $w^{\mathrm{T}} x^{M'} > t$. Άτοπο
  Άρα η ανισότητα $x_e \geq 0$ ορίζει την ίδια έδρα F.

- **Περίπτωση 2** Έστω ότι για κάποιο $v \in V$, κάθε ταίριασμα του M^* καλύπτει τον v.
  Κάθε ταίριασμα του M^* ικανοποιεί την
  $$x(\delta(v)) = 1$$
  Άρα η ανισότητα
  $$x(\delta(v)) \leq 1$$
  ορίζει την F.

- **Περίπτωση 3** Έστω $w_e \geq 0$, $\forall e \in E$ και ότι $\forall v \in V$ υπάρχει ταίριασμα στο M^* που δεν καλύπτει το v.
  Η παραπάνω περίπτωση, που ολοκληρώνει την απόδειξη του Edmonds, θα εξετασθεί στο Μάθημα 18.

∎